

УДК 629.365

EDN: LHBLKW

## МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОФИЛЬНОЙ ПРОХОДИМОСТИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА НА ЭТАПЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

**В.Н. Наумов**ORCID: 0000-0001-5172-0364 e-mail: [naumovvn@bmstu.ru](mailto:naumovvn@bmstu.ru)Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
*Москва, Россия***Е.Б. Сарач**ORCID: 0000-0001-7027-9164 e-mail: [sarach@yandex.ru](mailto:sarach@yandex.ru)Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
*Москва, Россия***А.А. Стадухин**ORCID: 0000-0003-1414-3435 e-mail: [ant.m9@ya.ru](mailto:ant.m9@ya.ru)Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
*Москва, Россия***Б.В. Русаков**ORCID: 0009-0006-9724-9049 e-mail: [bvlr4@ya.ru](mailto:bvlr4@ya.ru)Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
*Москва, Россия*

Предложен метод анализа профильной проходимости мобильного робота, который можно использовать на этапе проектирования. Метод состоит в анализе профильной проходимости с помощью итерационного алгоритма, использующего аналитические уравнения статики твердого тела, при этом сопротивление качению колеса не учитывается. Программа позволяет определять требуемое для преодоления неровности положение центра масс машины с учетом доступной силы тяги по двигателям. Приведены зависимости, необходимые для нахождения сил и моментов, действующих при взаимодействии колеса с опорной поверхностью. Описанный алгоритм вычисления сил, действующих на машину, нетребователен к вычислительным мощностям, в отличие от современных методов решения подобных задач методом численного математического моделирования. Адекватность предложенного метода оценки профильной проходимости была подтверждена с помощью простого натурального эксперимента. Представленный подход может быть полезен для разработки системы управления машин, способных менять расположение центра тяжести при движении.

**Ключевые слова:** профильная проходимость, мобильный робот, положение центра масс, колесный движитель, уравнения статики, эксперимент.

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Наумов, В.Н. Метод исследования профильной проходимости мобильного робота на этапе проектирования / В.Н. Наумов, Е.Б. Сарач, А.А. Стадухин, Б.В. Русаков // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 4. С. 103-113. EDN: LHBLKW

## A METHOD FOR INVESTIGATING CROSS-COUNTRY ABILITY OF MOBILE ROBOT DURING THE DESIGN PHASE

**V.N. Naumov**ORCID: 0000-0001-5172-0364 e-mail: [naumovvn@bmstu.ru](mailto:naumovvn@bmstu.ru)Bauman Moscow State Technical University  
*Moscow, Russia*

**E.B. Sarach**

ORCID: **0000-0001-7027-9164** e-mail: **sarach@yandex.ru**  
Bauman Moscow State Technical University  
*Moscow, Russia*

**A.A. Stadukhin**

ORCID: **0000-0003-1414-3435** e-mail: **ant.m9@ya.ru**  
Bauman Moscow State Technical University  
*Moscow, Russia*

**B.V. Rusakov**

ORCID: **0009-0006-9724-9049** e-mail: **bvlr4@ya.ru**  
Bauman Moscow State Technical University  
*Moscow, Russia*

**Abstract.** The article proposes a method for analyzing the cross-country ability of a mobile robot, which can be used during the design stage. The method involves analyzing the cross-country ability using an iterative algorithm based on analytical equations of rigid body statics, while, as an assumption, the rolling resistance of the wheel is not taken into account. The program is designed to determine the optimal position of the machine's center of mass needed to overcome the obstacles, taking into account the available traction force from the engines. The dependences necessary to find the forces and moments acting when the wheel interacts with the support surface are given. The described algorithm for calculating the forces acting on the machine is not demanding of computing power, unlike modern methods by numerical mathematical modeling using for these tasks. The adequacy of the proposed method for assessing cross-country ability was confirmed using a simple field experiment. The presented approach may be useful for developing a control system for machines capable of changing the location of the center of gravity when moving.

**Key words:** cross-country ability, mobile robot, position of the center of mass, wheel drive, static equations, experiment.

**FOR CITATION:** V.N. Naumov, E.B. Sarach, A.A. Stadukhin, B.V. Rusakov. A method for investigating the profile patency of a mobile robot during the design phase. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 4. Pp. 103-113. EDN: LHBLKW

На этапе проектирования мобильного робота часто требуется оценить возможности профильной проходимости и подобрать массогабаритные параметры разрабатываемой машины. Однако, ввиду ограниченности известных параметров машины, на данном этапе может отсутствовать возможность проведения численного моделирования. В таком случае прибегают к аналитическим методам, которые применимы также в системах активного изменения центра масс мобильного робота ввиду малых требований к вычислительным мощностям. Например, в работе [1] предложена математическая модель для активного изменения центра масс колесного маятникового робота с целью преодоления лестничного марша. Данная модель требует значительных вычислительных мощностей для решения матриц седьмого порядка численным методом в реальном времени.

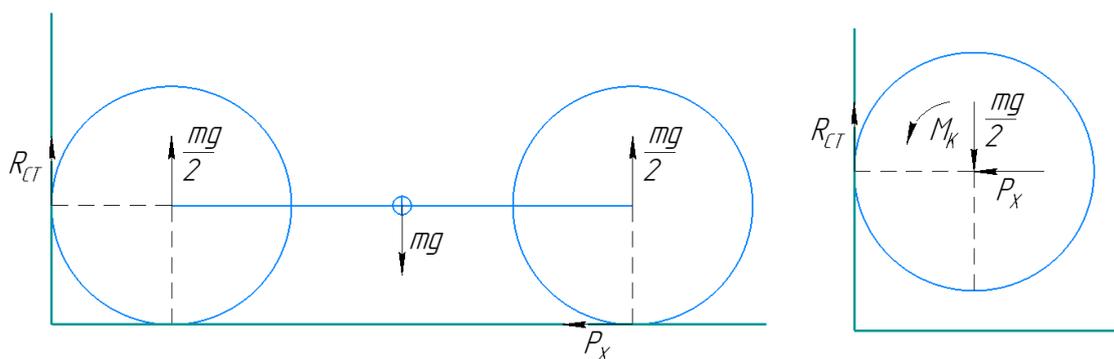
В работе [2] получены уравнения для определения замедления машины, но только при преодолении прямоугольного порога с высотой значительно меньше радиуса колеса. Работа [3] посвящена изучению профильной проходимости автомобиля с учетом его тяговых возможностей. В данной статье было учтено взаимодействие с вертикальным препятствием сопоставимого с радиусом колеса размером. Сложность взаимодействия заставила разбить процесс на два этапа и записать отдельные уравнения равновесия сил для колес на горизонтальном участке и колес, преодолевающих препятствие. В работе [4] указано на ошибочность распространённого утверждения о невозможности преодоления передними колесами полноприводного автомобиля вертикальной стенки, превышающей по высоте радиус колес, приведен вывод условия подъема передней оси полноприводной машины на стену, однако, не учтен реактивный крутящий момент от взаимодействия колес с грунтом. Данное допущение может вносить весомый вклад при проектировании колесных мобильных роботов, исследуемых в нашей

работе, ввиду большого отношения радиуса колеса к колесной базе и значительной удельной силе тяги. В работе [5] приведено моделирование заезда полноприводной машины на вертикальную стену с применением алгоритма пересечения многогранников, подтверждающее возможность заезда на стену передней осью полноприводной машины. В [6] приведено ошибочное заявление о невозможности заезда полноприводной колесной машины на вертикальную стену также по причине отсутствия учета реактивного крутящего момента от колес на корпус машины.

В данной статье предлагается использование математической модели, учитывающей реактивный крутящий момент от колес на корпус машины, максимально возможно реализуемую силу на колесах и положение центра масс машины. При этом, в отличие от большинства упомянутых выше работ, предлагается учитывать в аналитической модели реактивный крутящий момент от колес на корпус машины при вычислении потребной силы для подъема.

### Анализ общепринятого решения о возможности заезда полноприводного автомобиля на стену

В учебниках по теории движения принято, что заезд на неровность полноприводной машины возможен только при условии, что радиус колеса больше высоты неровности [6]. Анализ общепринятого решения (рис. 1) показал, что в схеме нагружения машины не учитывался реактивный крутящий момент со стороны колес и принято равномерное распределение нагрузки по осям.



**Рис. 1. Расчетная схема при общепринятом решении:**

$m$  – масса машины;  $P_x$  – продольная реакция взаимодействия с опорным основанием колес задней оси машины;  $R_{CT}$  – продольная реакция взаимодействия со стеной колес передней оси машины;  $M_K$  – крутящий момент, приложенный к оси машины

**Fig. 1. Calculation scheme for the generally accepted solution:**

$m$  – machine weight;  $P_x$  – longitudinal reaction of interaction with the support base of the machine rear axle wheels;  $R_{CT}$  – longitudinal reaction of interaction with the wall of the machine front axle wheels;  $M_K$  – torque applied to the machine axis

Продольная реакция взаимодействия с опорным основанием колес задней оси вычисляется по формуле (1):

$$P_x = \frac{mg}{2} \cdot \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – коэффициент сцепления между колесом и опорным основанием.

Продольная реакция взаимодействия со стеной колес передней оси вычисляется по формуле (2):

$$R_{CT} = P_x \cdot \varphi_{CT}, \quad (2)$$

где  $\varphi_{CT}$  – коэффициент сцепления между колесом и стеной.

Заезд на вертикальную стену при этом возможен при  $R_{CT} > \frac{mg}{2}$  или  $\frac{mg}{2} \cdot \varphi \cdot \varphi_{CT} > \frac{mg}{2}$ , т.е. условие заезда имеет вид:  $\varphi \cdot \varphi_{CT} > 1$ . Следовательно, при обычных условиях, заезд невозможен, что опровергается практикой эксплуатации автомобилей [4].

### Предлагаемый аналитический метод исследования профильной проходимости

Очевидно, что возможности преодоления вертикальной ступени определяется, в том числе, текущим расположением центра масс. С целью решения задачи по определению требуемого для преодоления неровности положения центра масс машины и потребный крутящий момент двигателей предложен аналитический метод исследования профильной проходимости, основанный на уравнениях статического равновесия. Для учета реактивного крутящего момента и возможности изменения положения центра масс машины была составлена расчетная схема (рис. 2). Весь процесс преодоления препятствия предлагается разделить на два случая, каждый из которых имеет два этапа.

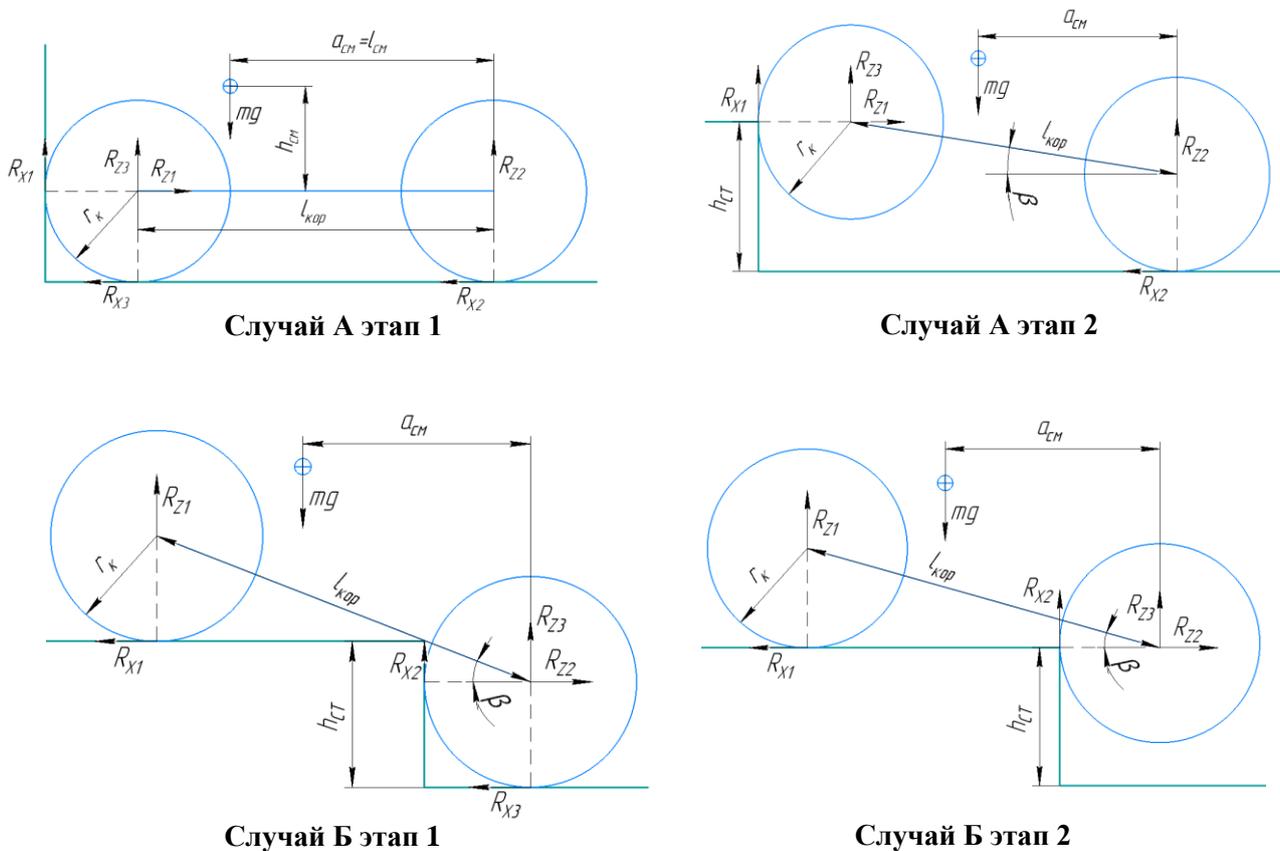


Рис. 2. Расчетная схема для двух случаев, учитывающая положение центра масс и реактивный крутящий момент от движителя

Fig. 2. Calculation scheme for two cases, taking into account the position of the center of mass and the reactive torque from the propulsion unit

В первом случае (случай А на рис. 2) условием подъема является неравенство:  $R_{X1} > R_{Z3}$ , условием не опрокидывания является неравенство:  $R_{Z1} > 0$ .  $R_{Z3}$  – суммарная вертикальная сила на оси, возможность подъема которой проверяется, находится из равенства нулю крутящих моментов относительно противоположной оси.

Случай А этап 1 соответствует началу заезда: колеса обеих осей машины находятся на опорной поверхности, колеса передней оси уперты в стену. В данном случае угол подъема корпуса относительно горизонтали  $\beta = 0$ .

Случай А этап 2: колеса передней оси машины оторваны от опорного основания и находятся в контакте со стеной, колеса задней оси машины находятся на опорной поверхности. В данном случае угол подъема корпуса относительно горизонтали  $\beta = \arcsin\left(\frac{h_{CT} - r_k}{l_{кор}}\right)$ .

Во втором случае (случай Б на рис. 2) условием подъема является неравенство:  $R_{X2} > R_{Z3}$ , условием не опрокидывания является неравенство:  $R_{Z1} > 0$ .

Случай Б этап 1: колеса передней оси машины находятся на верхней опорной поверхности, колеса задней оси машины находятся на нижней опорной поверхности и уперты в стену. В данном случае угол подъема корпуса относительно горизонтали  $\beta = \arcsin\left(\frac{h_{CT}}{l_{кор}}\right)$ .

Случай Б этап 2: колеса передней оси машины находятся на верхней опорной поверхности, колеса задней оси машины оторваны от опорного основания и находятся в контакте со стеной. В данном случае угол подъема корпуса относительно горизонтали  $\beta = \arcsin\left(\frac{r_k}{l_{кор}}\right)$ .

В рамках предлагаемого метода принято, что колесный движитель имеет межколесную и межосевую блокировку, а сопротивление качению пренебрежимо мало. При вычислениях считается, что суммарная сила тяги, приложенная к движителю, известна (в дальнейшем при построении графиков осуществляется перебор от 0 до заданной максимальной силы тяги). При достижении одной из продольных сил максимального реализуемого по сцеплению значения, избыток тяги равномерно распределяется на остальные продольные силы. Так продолжается до момента достижения всеми продольными силами максимальных реализуемых по сцеплению значений.

На первом шаге цикла программы принимается, что крутящий момент равномерно распределен по всем продольным силам взаимодействия движителя с опорным основанием. Затем вычисляются значения нормальных реакций и максимально возможных реализуемых сил  $R_{X\varphi}$ , причем для лучшей сходимости метода для дальнейших вычислений используются не новые значения  $R_{X\varphi}$ , а средние между новыми значениями и значениями с предыдущего шага (рис. 3-6). Дальнейший расчет производится после сортировки полученных значений  $R_{X\varphi}$  по возрастанию и исходя из текущего случая и этапа преодоления препятствия (рис. 3-6).

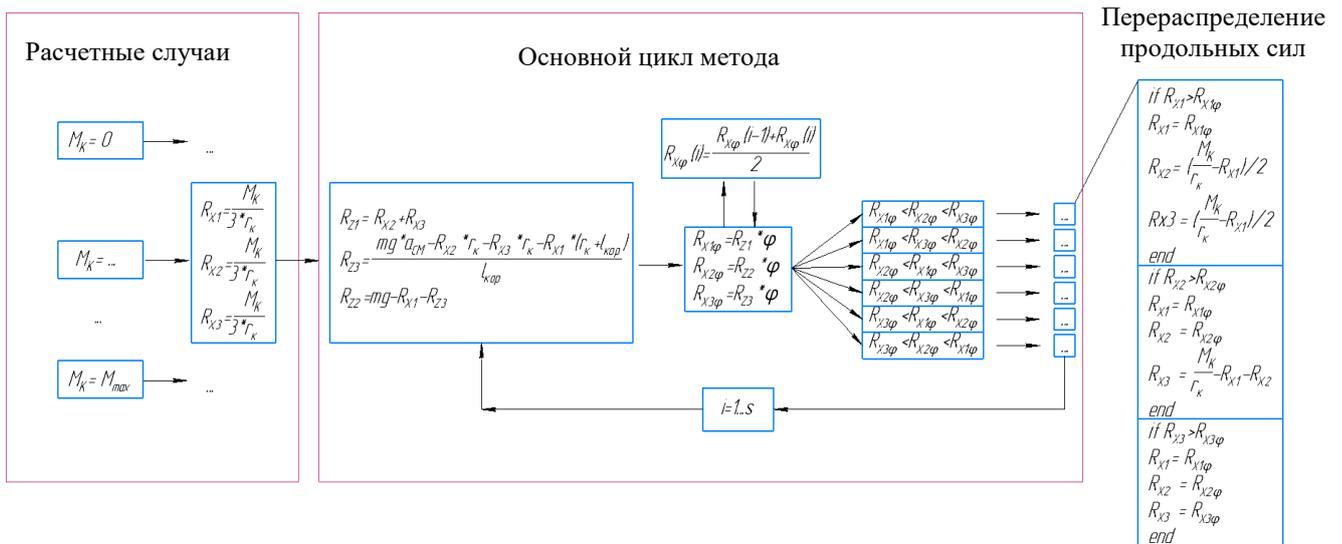


Рис. 3. Схемы алгоритма вычисления внешних сил, действующих на машину при случае А на этапе 1

Fig. 3. Schemes of the algorithm for calculating external forces acting on the machine in case A at stage 1

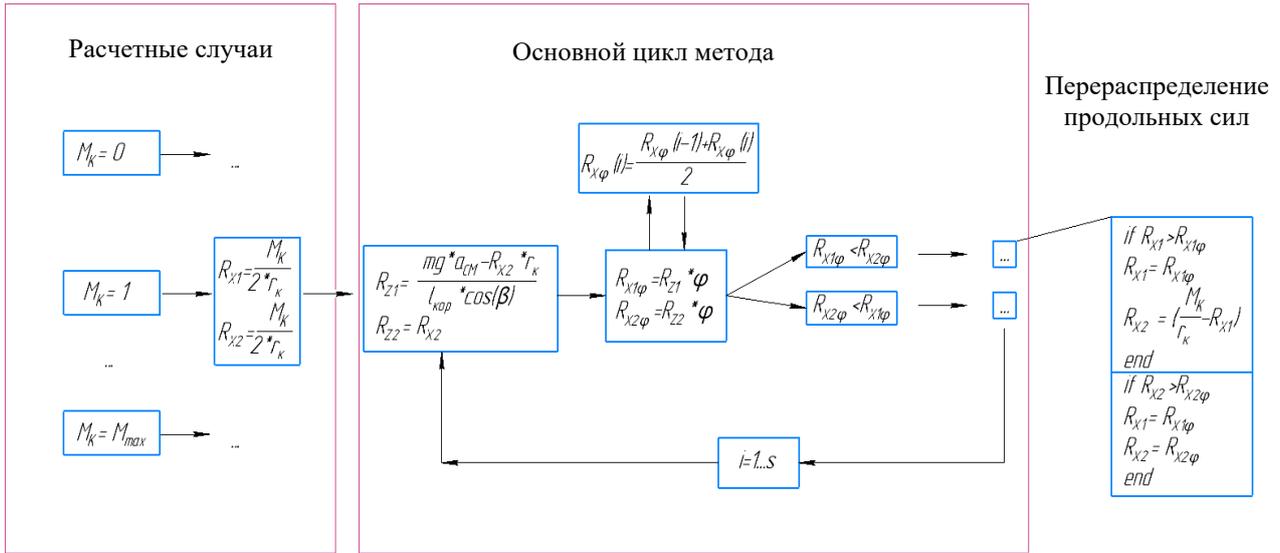


Рис. 4. Схемы алгоритма вычисления внешних сил, действующих на машину при случае А на этапе 2

Fig. 4. Schemes of the algorithm for calculating external forces acting on the machine in case A at stage 2

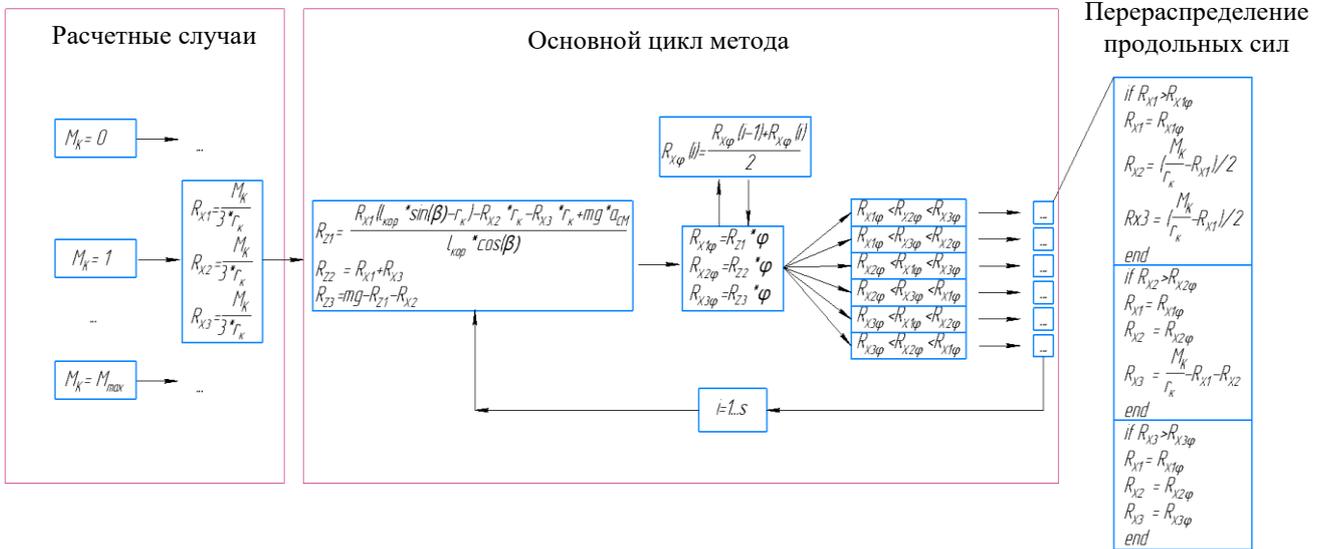


Рис. 5. Схемы алгоритма вычисления внешних сил, действующих на машину при случае Б на этапе 1

Fig. 5. Schemes of the algorithm for calculating external forces acting on the machine in case B at stage 1

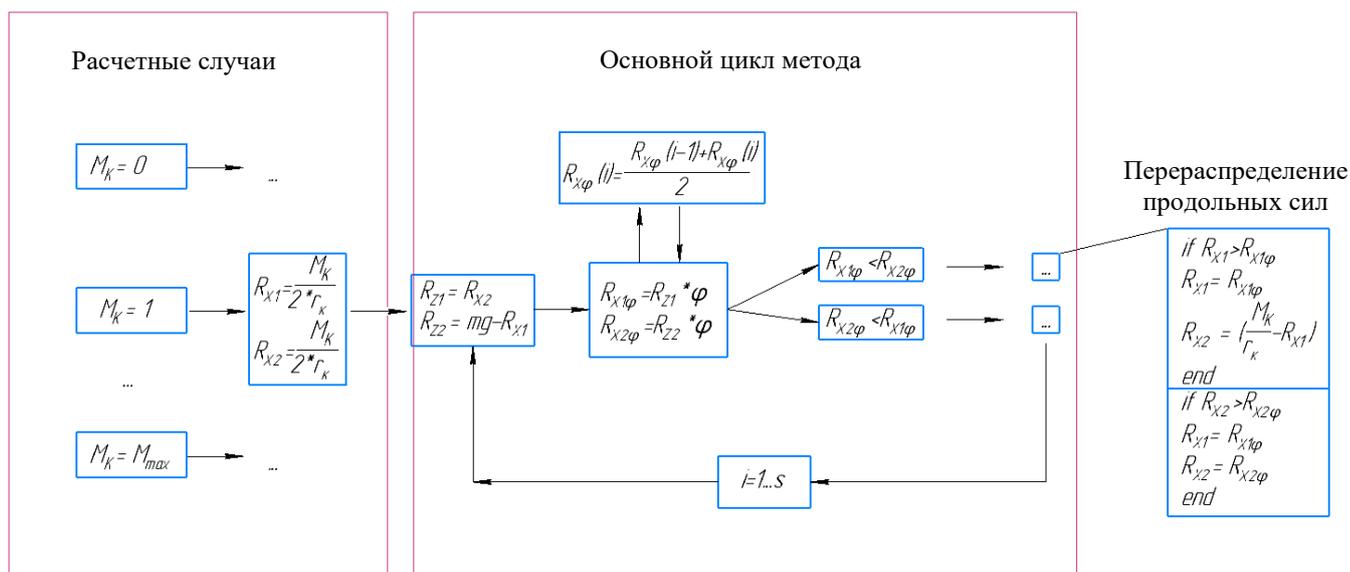


Рис. 6. Схемы алгоритма вычисления внешних сил, действующих на машину при случае Б на этапе 2

Fig. 6. Schemes of the algorithm for calculating external forces acting on the machine in case B at stage 2

Вычисление нормальных реакций производится с использованием II закона Ньютона и равенства нулю крутящих моментов относительно одной из осей машины. Например, для случая 1а (рис. 2):

Для горизонтальной оси координат можно записать (3):

$$R_{Z1} = R_{X2} + R_{X3}. \tag{3}$$

Из равенства нулю крутящих моментов относительно задней оси машины следует (4):

$$R_{Z3} = \frac{mg \cdot a_{CM} - R_{X2} \cdot r_k - R_{X3} \cdot r_k - R_{X1} \cdot (r_k + l_{кор})}{l_{кор}}. \tag{4}$$

Аналогично (3) для вертикальной оси координат следует (5):

$$R_{Z2} = mg - R_{X1} - R_{Z3}. \tag{5}$$

Максимально возможная реализуемая сила вычисляется по формуле (6):

$$R_{X\phi} = R_z \cdot \phi. \tag{6}$$

Принимается допущение, что максимальное значение коэффициента трения  $\phi$  равно коэффициенту трения-скольжения ввиду недостаточности исходных данных для использования  $\mu$ -s диаграммы.

Аналогичным образом вычисляются силы для каждого случая и формируется программа вычисления сил, действующих на машину (рис. 3). Для подтверждения работоспособности программы произведен натурный эксперимент.

### Экспериментальная часть

Экспериментальная часть состоит из двух этапов. На первом из них с использованием предложенного метода производится оценка возможности преодоления машиной препятствия в сравнении с реальной возможностью заезда на ступень базового образца. На втором этапе производится подбор требуемого положения центра масс машины для заезда передних и задних колес на преграду по описанной методике и проверка возможности заезда в натурном эксперименте.

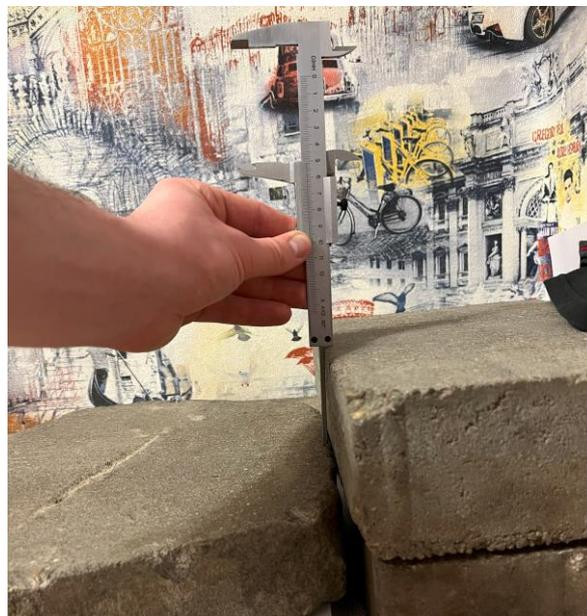
Произведено измерение параметров натурального образца, результаты представлены в табл. 1.

**Таблица 1.**  
**Параметры натурального образца**  
**Table 1.**  
**Parameters of a nature-sized sample**

Параметр	Значение
Продольное расстояние от задней оси до ЦМ ( $l_{CM}$ ), м	0,0864
Вертикальное расстояние от задней оси до ЦМ ( $h_{CM}$ ), м	0,0261
Масса ( $m$ ), кг	0,704
Колесная база ( $l_{кор}$ ), м	0,16
Радиус колеса ( $r_k$ ), м	0,048
Коэффициент трения-скольжения ( $\varphi$ )	0,67
Максимальный крутящий момент ( $\max(M_K)$ ), Нм	0,64

Нахождение центра масс образца производилось взвешиванием по отдельности осей машины при наклоне образца под определенным углом (одна ось расположена ниже другой). Нахождение коэффициента трения производилось протягиванием образца через весы с крючком при заблокированных колесах. На рис. 7 представлен внешний вид испытательной трассы. Высота ступени равна 68 мм при радиусе колеса образца 48 мм.

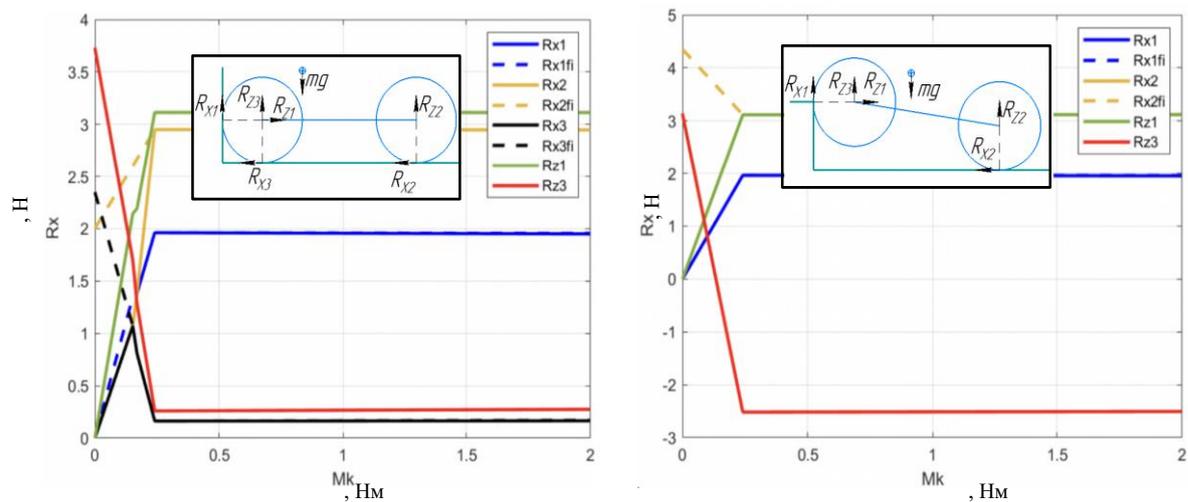
По результатам предложенного аналитического метода, заезд образца с исходными параметрами возможен только на первом этапе. Это видно по тому, что на первом этапе (графики 1а, 1б на рис. 8) выполняется условие  $R_{X1} > R_{Z3}$ : есть область, в которой синяя линия ( $R_{X1}$ ) выше красной ( $R_{Z3}$ ), а на втором этапе (графики 2а, 2б на рис. 5) не выполняется условие  $R_{X2} > R_{Z3}$ : на всем графике синяя линия ( $R_{X2}$ ) ниже красной ( $R_{Z3}$ ). Ни на одном из этапов не происходит опрокидывание ( $R_{Z1} > 0$ ).



**Рис. 7. Внешний вид испытательной трассы**

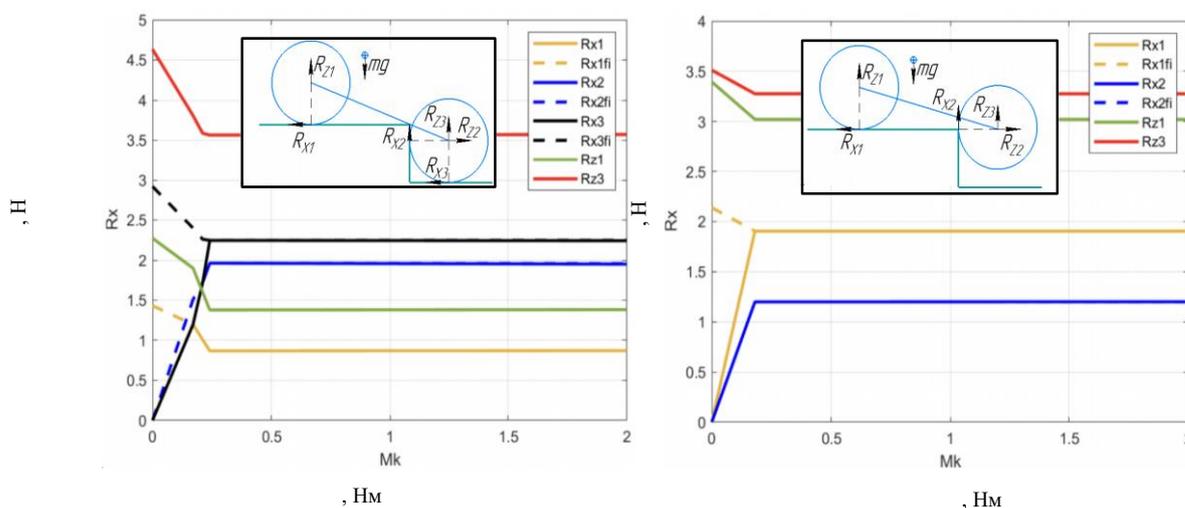
**Fig. 7. Exterior view of the test track**

Натурный эксперимент для образца с исходными параметрами (табл. 1) подтвердил аналитическое решение – машина не может преодолеть второй этап заезда по причине недостаточного сцепления движителя с опорным основанием – наблюдается безрезультатное буксование (рис. 9). Опрокидывания не происходит.



Случай А этап 1

Случай А этап 2



Случай Б этап 1

Случай Б этап 2

Рис. 8. Аналитическое решение для исходного образца

Fig. 8. Analytical solution for the original sample

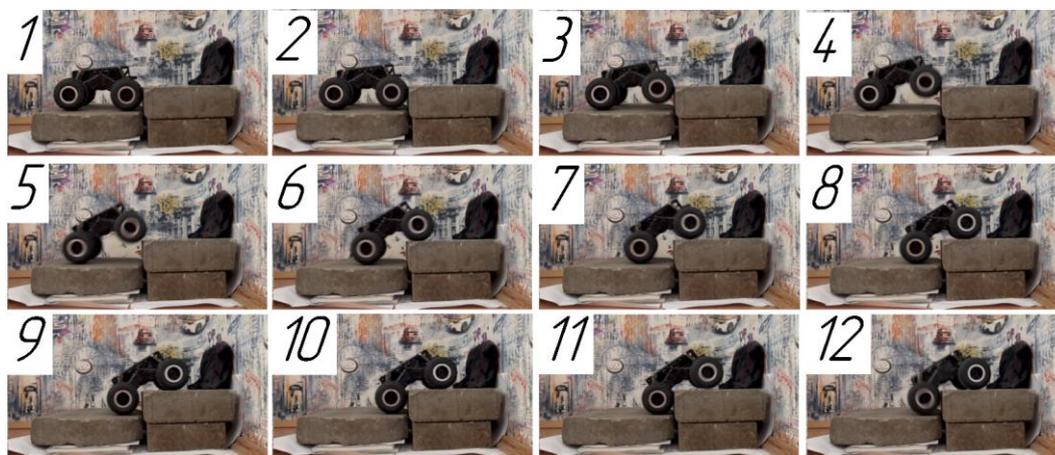


Рис. 9. Натурный эксперимент с исходным образцом

Fig. 9. Nature-sized experiment with the original sample

С помощью описанного выше метода было подобрано такое положение центра масс образца, при котором теоретически возможен заезд на ступень на обоих этапах (рис. 10). Для этого использовался дополнительный груз и перемещение аккумулятора образца. Модифицированный образец обладает следующими параметрами:  $l_{CM} = 0,118$  м;  $h_{CM} = 0,03$  м;  $m = 0,975$  кг, остальные параметры остались неизменны (табл. 1). Подбор новых параметров осуществлялся итерационным перемещением груза, а также последующим измерением положения центра масс машины и проверкой условий заезда в программе: на первом этапе  $R_{X1} > R_{Z3}$ , а на втором этапе  $R_{X2} > R_{Z3}$  (на всех четырех графиках на рис. 10 должен быть участок, на котором синяя линия выше красной).

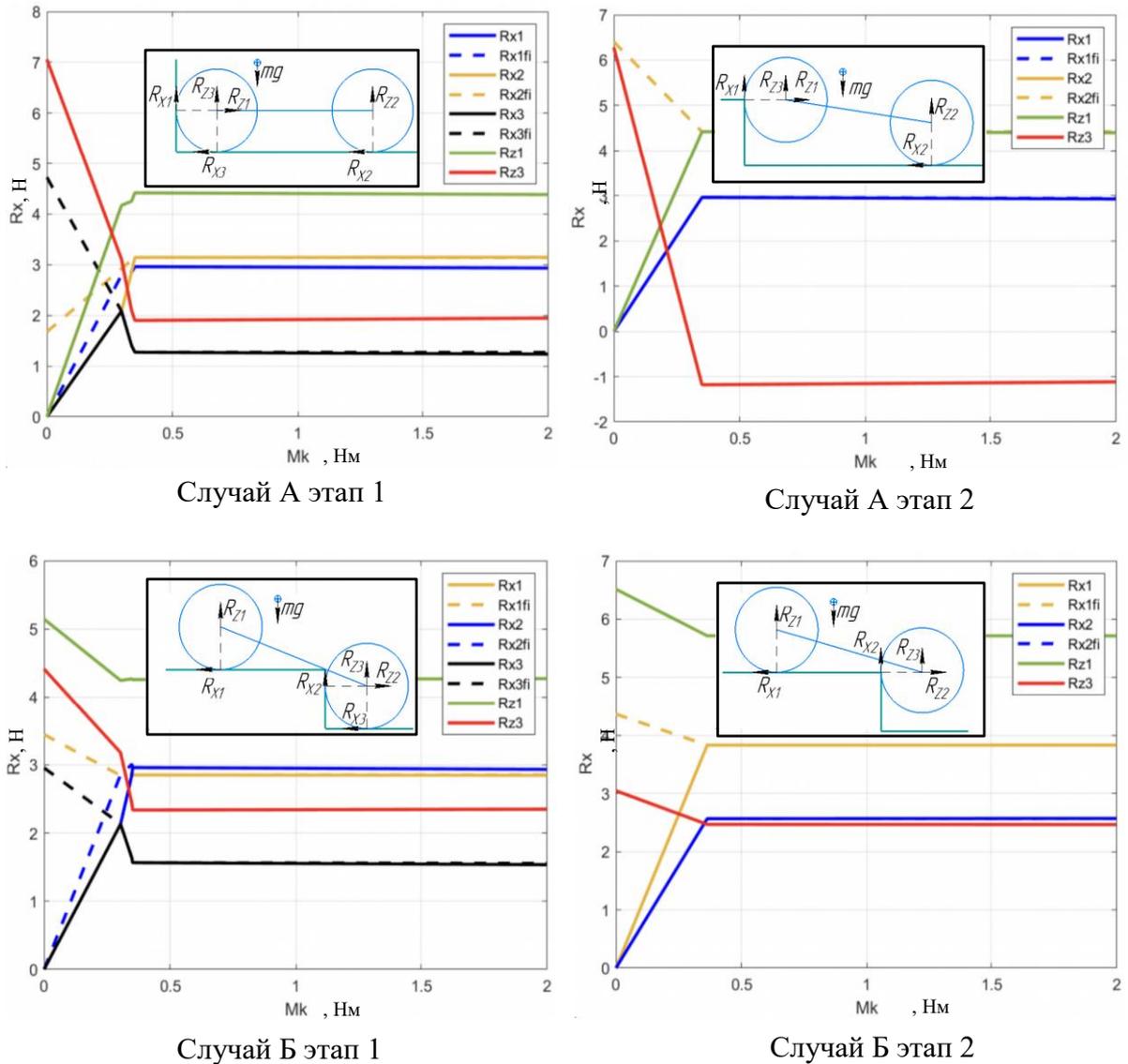


Рис. 10. Аналитическое решение для измененного образца

Fig. 10. Analytical solution for the modified sample

Натурный эксперимент с модифицированным образцом (рис. 11) подтвердил аналитическое решение – возможно обеспечить преодоление преграды, представленной на рис. 7, при этом опрокидывания образца не происходит.

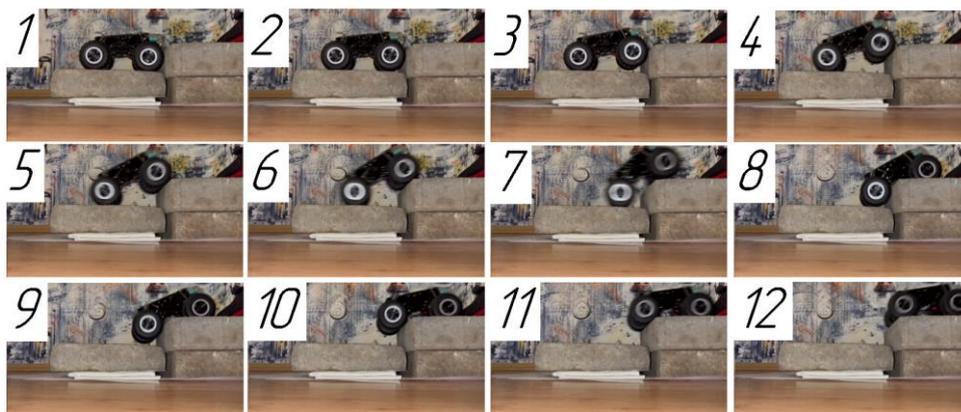


Рис. 11. Натурный эксперимент с модифицированным образцом

Fig. 11. Nature-sized experiment with a modified sample

### Выводы

Предложен аналитический метод исследования профильной проходимости колесной полноприводной машины, основанный на уравнениях статического равновесия. Он позволяет производить анализ профильной проходимости с минимальными затратами вычислительных мощностей и малым количеством исходных данных. Доказано, что, в отличие от данных в учебной литературе, существуют ситуации, когда возможен заезд на ступень с высотой, большей, чем радиус колеса, для колесного движителя с формулой 4x4. Подтверждена работоспособность предложенного метода путем качественного сравнения с натурным экспериментом.

Результаты статьи могут быть полезны при выборе параметров ходовой части и технического облика вновь разрабатываемых мобильных роботов, а также в системах активного изменения центра масс мобильного робота с целью повышения профильной проходимости.

### Библиографический список

1. **Strah, B.** Autonomous Stair Climbing of a Wheeled Double Inverted Pendulum / B. Strah, S. Rinderknecht // 6th IFAC Symposium on Mechatronic Systems. April 10-12, 2013. Hangzhou, China.
2. **Мамити, Г.И.** Динамическое преодоление невысокого порога полноприводным автомобилем / Г.И. Мамити, С.Х. Плиев, В.Г. Васильев // Известия Горского государственного аграрного университета. 2015. Вып. 3. С. 152-157.
3. **Шухман, С.Б.** Теоретическое исследование профильной проходимости полноприводного автомобиля / С.Б. Шухман, В.И. Соловьев, М.А. Малкин // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. Вып. 11. С. 4.
4. **Мамити, Г.И.** Оптимальная развесовка полноприводного автомобиля / Г.И. Мамити, С.Х. Плиев, В.Г. Васильев // Известия Горского государственного аграрного университета. 2015. Вып. 2. С. 157-160.
5. **Стадухин, А.А.** Исследование профильной проходимости колесной машины с помощью алгоритма пересечения многогранников / А.А. Стадухин, Р.Д. Песков // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. № 9 (69). С. 8. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-9-1677.
6. **Ларин, В.В.** Теория движения полноприводных колесных машин. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 391 с.

*Дата поступления  
в редакцию: 12.03.2024*

*Дата принятия  
к публикации: 23.10.2024*