

УДК 681.5

EDN: KMTCCU

КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

А.А. ШабашовORCID: 0009-0000-8320-5201 e-mail: aa.shabashov@mail.ruНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
*Нижний Новгород, Россия*АО «Арзамасское научно-производственное предприятие «ТЕМП-АВИА»
*Арзамас, Россия***А.А. Плотников**ORCID: 0009-0007-6688-5517 e-mail: artyom152rus@yandex.ruНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
*Нижний Новгород, Россия*АО «Арзамасское научно-производственное предприятие «ТЕМП-АВИА»
Арзамас, Россия

Рассматривается задача представления нелинейной динамической системы в пространстве состояний с помощью метода квазилинеаризации. Разрабатываемый метод построения квазилинейной модели основан на принципах структурно-параметрического синтеза. Первый этап заключается в аналитическом выводе структуры квазилинейной модели из нелинейных дифференциальных уравнений с выявлением варьируемых параметров, от которых зависят динамические характеристики объекта управления. На этапе параметрического синтеза проводится идентификация неизвестных элементов полученной структуры в виде функциональных зависимостей от соответствующих переменных. Для этого решается задача аппроксимации в виде линейной обобщенной модели с использованием алгоритмов разреженной регрессии и эвристического разложения этой модели на необходимые функциональные зависимости. В качестве примера метод квазилинеаризации применен к нелинейной модели изолированного движения беспилотного летательного аппарата в продольном канале относительно центра масс. Предложенный метод может быть применен и к другим моделям с подобными свойствами для решения задач управления нелинейными динамическими системами современными методами теории управления.

Ключевые слова: нелинейная модель, квазилинеаризация, квазилинейная модель, разреженная регрессия, эвристическое разложение, пространство состояний, аппроксимация.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Шабашов, А.А. Квазилинеаризация нелинейной модели беспилотного летательного аппарата / А.А. Шабашов, А.А. Плотников // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 4. С. 27-36. EDN: KMTCCU

QUASILINEARIZATION OF NONLINEAR MODEL OF UNMANNED AERIAL VEHICLE

A.A. ShabashovORCID: 0009-0000-8320-5201 e-mail: aa.shabashov@mail.ruNizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev
*Nizhny Novgorod, Russia*OJSC Arzamas Scientific and Production Enterprise «TEMP-AVIA»
Arzamas, Russia

A.A. Plotnikov

ORCID: **0009-0007-6688-5517** e-mail: **artyom152rus@yandex.ru**

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

OJSC Arzamas Scientific and Production Enterprise «TEMP-AVIA»

Arzamas, Russia

Abstract. The article discusses the problem of representing a nonlinear dynamic system in the state space using the quasilinearization method. The developed method for constructing a quasilinear model is based on the principles of structural-parametric synthesis. The first stage of construction consists in the analytical output of the structure of the quasilinear model from nonlinear differential equations with the identification of variable parameters, on which the dynamic characteristics of the plant depend. At the stage of parametric synthesis, identification of unknown elements of the resulting structure is carried out in the form of functional dependencies on the corresponding variables. For this, the task of approximation in the form of a linear generalized model using algorithms of sparse regression and heuristic decomposition of this model on the necessary functional dependencies is solved. As an example, the quasilinearization method is applied to the nonlinear model of the isolated movement of the unmanned aerial vehicle in the longitudinal channel relative to the center of the masses. The proposed method can be applied to other models with similar properties to solve problems of controlling nonlinear dynamic systems with modern methods of control theory.

Key words: non-linear model, quasilinearization, quasilinear model, sparse regression, heuristic decomposition, state space, approximation.

FOR CITATION: A.A. Shabashov, A.A. Plotnikov. Quasilinearization of nonlinear model of unmanned aerial vehicle. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 4. Pp. 27-36. EDN: KMTUU

Введение

Общепринятым подходом к решению задач управления является линеаризация нелинейной динамической системы относительно некоторых опорных точек, характеризующихся рабочими режимами применения объекта. Полученная таким образом линеаризованная модель является лишь приближением исходной системы и не учитывает все аспекты нелинейной динамики. Применительно к беспилотным летательным аппаратам (БПЛА) такими особенностями могут быть: аэродинамические «ложки», срыв потока на больших углах атаки и т.д. Достижение высокого качества управления во всем диапазоне изменения динамических характеристик предполагает обеспечение наиболее точного представления нелинейной модели объекта в необходимой для синтеза регуляторов форме. Решение рассмотренных задач целесообразно производить с помощью методов современной теории управления, что подразумевает представление системы в пространстве состояний.

Перспективным направлением в представлении нелинейных динамических систем в пространстве состояний является преобразование исходной системы в квазилинейную форму с изменяющимися параметрами (*quasi-Linear Parameter Varying – qLPV*) специальным образом [1]. В зависимости от априорной информации о динамике исследуемого объекта управления могут быть применимы различные методы идентификации систем, например, аналитический вывод, численные методы [2], квазилинеаризация [3], аппроксимация с использованием мягких вычислений (искусственных нейронных сетей, нечеткой логики и т.д.). Перечисленные методы, за исключением последнего, относятся к классу идентификации в узком смысле, что подразумевает наличие достаточно подробной информации о нелинейной динамике. Аппроксимация с помощью мягких вычислений, напротив, относится к классу идентификации в широком смысле и требует только достаточного объема данных в виде «вход-выход». Точность такой аппроксимации существенно зависит от настроек выбранного инструмента: типа и структуры нейронной сети, базы правил нечеткой модели и т.д. В некоторых случаях система нелинейных дифференциальных уравнений рассматриваемого объекта управления полностью известна, но не соответствует нормальной форме Коши. В результате

структурного преобразования к указанной форме появляются неизвестные переменные, которые необходимо идентифицировать по имеющимся исходным данным.

Целью настоящей работы является разработка эффективного метода квазилинеаризации нелинейной модели БПЛА с высокой точностью представления динамической системы по исходным данным о характеристиках объекта управления.

1. Структурный синтез квазилинейной модели

Для решения задач стабилизации относительно центра масс удобно использовать нелинейную модель пространственного движения БПЛА как твердого тела в проекциях на оси скоростной системы координат. В некоторых случаях при необходимости можно не учитывать взаимное влияние продольного и бокового каналов и пренебречь перекрестными связями между ними. Так, например, нелинейная модель изолированного движения БПЛА в продольном канале может иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \omega_z(t) - \frac{Y_a(t)}{mV}, \\ \dot{\omega}_z(t) &= \frac{M_z(t)}{J_z}, \\ \dot{\vartheta}(t) &= \omega_z(t), \\ n_y(t) &= \frac{Y_a(t)}{mg(H)},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\alpha(t)$ – угол атаки [рад], $\omega_z(t)$ – угловая скорость тангажа [рад/с], $\vartheta(t)$ – угол тангажа [рад], $n_y(t)$ – нормальная перегрузка [g], $Y_a(t)$ – подъемная аэродинамическая сила [Н], $M_z(t)$ – аэродинамический момент тангажа [Н·м], J_z – момент инерции тангажа [кг·м²], $g(H)$ – ускорение свободного падения [м/с²], H – высота [м], V – модуль воздушной скорости [м/с], m – масса БПЛА [кг].

Модель рулевого привода для гипотетического БПЛА может быть описана аperiodическим звеном и иметь вид:

$$T\dot{\delta}_B + \delta_B = \delta_B^{\text{зад}}, \quad (2)$$

где δ_B – угол отклонения руля высоты [рад], $\delta_B^{\text{зад}}$ – управляющий сигнал в продольном канале [рад], T – постоянная времени привода [с].

Нелинейная динамическая система может быть представлена в пространстве состояний с помощью qLPV модели:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t), \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t),\end{aligned}\quad (3)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор измерений, $u(t) \in \mathbb{R}^k$ – вектор управления, $\theta(t) = [\theta_1(t) \theta_2(t) \dots \theta_N(t)] \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ – вектор варьируемых параметров (в данном случае зависящий в т. ч. от состояния), N – количество варьируемых параметров, $\Omega = [\theta_1^{\min} \theta_1^{\max}] \times [\theta_2^{\min} \theta_2^{\max}] \times \dots \times [\theta_N^{\min} \theta_N^{\max}]$ – замкнутый гиперкуб, $\theta_n^{\min}, \theta_n^{\max}$ – диапазоны изменения варьируемых параметров.

Чтобы представить систему (1) в виде (3) сначала определим варьируемые параметры, от которых зависят характеристики нелинейной модели. Далее будем считать все параметры модели зависимыми от времени t за исключением J_z, g, H, V, m , которые в рамках короткопериодического движения предполагаются постоянными величинами.

Согласно [4], аэродинамические силу и момент можно представить в виде:

$$Y_a = c_y q S, \quad M_z = m_z q S b_a, \quad (4)$$

где c_y , m_z – аэродинамические коэффициенты силы и момента, q – скоростной напор [Н/м²], S , b_a – характерные площадь [м²] и размер [м].

Аэродинамические коэффициенты сил и моментов гипотетического БПЛА в общем случае являются функциями многих переменных:

$$c_y = c_y(M, \alpha, \beta, \delta_B, \delta_H, \delta_\delta), \quad m_z = m_z(M, \alpha, \beta, \delta_B, \delta_H, \delta_\delta), \quad (5)$$

где M – число Маха, δ_H, δ_δ – углы отклонения рулей направления и элерона [рад].

Пренебрежем перекрестными связями между каналами и проведем разложение рассмотренных коэффициентов в следующей форме:

$$\begin{aligned} c_y(M, \alpha, \delta_B) &= c_{y\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \cdot \alpha + c_{y\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \cdot \delta_B + c_{y0}(M), \\ m_z(M, \alpha, \delta_B) &= m_{z\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \cdot \alpha + m_{z\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \cdot \delta_B + m_{z0}(M). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения (4) в систему (1) с учетом (6), $q = \rho_H V^2 / 2$ и $V = a_H M$, нелинейную модель изолированного движения в продольном канале представим в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -c_{y\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M S}{2m} \cdot \alpha + \omega_z - c_{y\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M S}{2m} \cdot \delta_B - \\ &\quad - c_{y0}(M) \frac{\rho_H a_H^2 M S}{2m}, \\ \dot{\omega}_z &= m_{z\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S b_a}{2J_z} \cdot \alpha + m_{z\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S b_a}{2J_z} \cdot \delta_B + \\ &\quad + m_{z0}(M) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S b_a}{2J_z}, \\ \dot{\delta} &= \omega_z, \\ n_y &= c_{y\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S}{2mg(H)} \cdot \alpha + c_{y\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S}{2mg(H)} \cdot \delta_B + \\ &\quad + c_{y0}(M) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S}{2mg(H)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где ρ_H – плотность воздуха как функция от высоты H [кг/м³], a_H – скорость звука на высоте H [м/с].

Как видно из анализа системы уравнений (7), характеристики нелинейной модели зависят от множества переменных, которое можно представить в виде вектора варьируемых параметров для продольного канала:

$$\theta_{\Pi} = [H \quad M \quad \alpha \quad \delta_B].$$

Далее, предположив, что переходной процесс БПЛА совершается из установившегося движения (т.е. движение с нулевыми значениями начальных сил и моментов), статические составляющие $c_{y0}(M)$, $m_{z0}(M)$ будем считать равными нулю. Теперь можно записать нелинейную модель изолированного движения в продольном канале (7) вместе с уравнением динамики рулевого привода (2) в qLPV форме (3):

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \omega_z \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_4(\theta_{\Pi}) & 1 & -a_5(\theta_{\Pi}) \\ a_2(\theta_{\Pi}) & 0 & a_3(\theta_{\Pi}) \\ 0 & 0 & -T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_z \\ \delta_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T^{-1} \end{bmatrix} \delta_B^{\text{зад}}, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} n_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_6(\theta_{\Pi}) & 0 & a_7(\theta_{\Pi}) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_z \\ \delta_B \end{bmatrix},$$

где

$$a_2(H, M, \alpha, \delta_B) = m_{z\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S b_a}{2J_z}, \quad a_3(H, M, \alpha, \delta_B) = m_{z\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S b_a}{2J_z},$$

$$a_4(H, M, \alpha, \delta_B) = c_{y\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H M S}{2m}, \quad a_5(H, M, \alpha, \delta_B) = c_{y\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H M S}{2m},$$

$$a_6(H, M, \alpha, \delta_B) = c_{y\alpha}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S}{2mg(H)}, \quad a_7(H, M, \alpha, \delta_B) = c_{y\delta_B}(M, \alpha, \delta_B) \frac{\rho_H a_H^2 M^2 S}{2mg(H)}.$$

2. Параметрический синтез квазилинейной модели

Пусть исходные данные об аэродинамических коэффициентах гипотетического БПЛА представлены в общей форме (5). Тогда, на основании синтезированной структуры qLPV модели (8), необходимо провести идентификацию неизвестных параметров

$$c_{y\alpha}(M, \alpha, \delta_B), \quad c_{y\delta_B}(M, \alpha, \delta_B), \quad m_{z\alpha}(M, \alpha, \delta_B), \quad m_{z\delta_B}(M, \alpha, \delta_B)$$

в виде функциональных зависимостей от соответствующих переменных.

Одним из вариантов получения разложения коэффициентов в необходимой форме (6) является аппроксимация исходных зависимостей (5) специальным образом. Для реализации подобного преобразования заметим, что в первом приближении коэффициенты аэродинамических сил и моментов могут быть представлены гладкими всюду непрерывными функциями, которые зависят лишь от малого числа входных параметров. Следовательно, нет необходимости рассматривать все возможные нелинейные комбинации, а достаточно вести поиск в малом наборе зависимостей требуемого вида [5, 6].

В результате задача параметрического синтеза может быть сведена к задаче аппроксимации с помощью линейной обобщенной модели:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^m \theta_i(x) \xi_i = \Theta(x) \Xi, \quad (9)$$

где $f(x) = [f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – наборы значений аппроксимируемой зависимости для соответствующих наборов входных параметров $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $x_i = [p_1, \dots, p_b] \in \mathbb{R}^{1 \times b}$ – входные параметры i -ого набора для $f_i(x_i)$, $\Theta(x) = [\theta_1(x), \dots, \theta_m(x)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – библиотека функций кандидатов, $\theta_i(x) = [\theta_i(x_1), \dots, \theta_i(x_n)] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – наборы значений i -ой функции кандидата, $\Xi = [\xi_1, \dots, \xi_m] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ – вектор коэффициентов перекрестных связей.

Модель (9) вычисляется путем нахождения вектора коэффициентов Ξ на основе задачи выпуклой разреженной регрессии с регуляризацией по L_1 норме:

$$\Xi = \arg \min_{\Xi} \|f(x) - \Theta(x)\Xi\|_2 + \varepsilon \|\Xi\|_1, \quad (10)$$

где ε – настраиваемый параметр, характеризующий разреженность.

Для решения задачи (10) может быть использован последовательный метод наименьших квадратов с порогом [7]. Далее представлено его описание.

Алгоритм 1 Последовательный метод наименьших квадратов с порогом

Вход: $f(x)$ – наборы значений аппроксимируемой зависимости, x – наборы входных параметров, $\Theta(x)$ – библиотека функций кандидатов, ε – параметр разреженности модели, k_{\max} – максимальное число итераций.

Выход: Ξ – вектор коэффициентов перекрестных связей.

1. Вычислить начальное приближение $\Xi^0 = \Theta^{-1}(x)f(x)$;

2. **Цикл** $k < k_{\max}$

3. $k = k + 1$;

4. Найти коэффициенты меньше установленного порога $I_\varepsilon = |\Xi^k| < \varepsilon$;

5. Исключить из отбора малые коэффициенты $\Xi^k(I_\varepsilon) = 0$;

6. Найти оставшиеся коэффициенты $I_s \sim I_\varepsilon$;

7. Сформировать новую k оценку $\Xi^k(I_s) = \Theta^{-1}(I_s, :)f(x)$;

8. **Конец цикла**

Выбор нужного набора функций кандидатов зависит от вида необходимого представления $f(x)$. Тогда для получения формы (6) удобно использовать следующую полиномиальную модель:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{P_{\max}} \sum_{j=0}^{P_{\max}} \dots \sum_{l=0}^{P_{\max}} \left(\xi_a \cdot \underbrace{p_1^i \cdot p_2^j \cdot \dots \cdot p_b^l}_{\theta_a}, \quad a = a+1 \right), \quad a = 1, \dots, m, \quad (11)$$

где P_{\max} – максимальная степень полинома. Причем каждая уникальная комбинация степеней $p_1^i \cdot p_2^j \cdot \dots \cdot p_b^l$ из (11) соответствует определенной функции кандидату θ_a из (9).

Для получения необходимого разложения по форме (6) ряд (11) необходимо представить в виде:

$$L(x) = \sum_{i=1}^M L_i(x) \cdot p_{l_i}, \quad (12)$$

где M – число разложений, $L_i(x)$ – полиномиальные модели, входящие в состав (11), определяемые в результате разложения, $p_{l_1}, p_{l_2}, \dots, p_{l_M}$ – параметры, для которых нужно найти разложение.

Модель по форме (11) допускает разнесение параметров по форме (12). Однако в общем случае их количество может быть достаточно большим, что усложняет эвристический способ разложения. Предположим, что наибольший вклад в изменение аэродинамических коэффициентов вносят элементы малых порядков без перекрестных связей между входными параметрами, тогда процесс разложения может быть автоматизирован для исключения ошибок, связанных с «ручным» разбиением.

Если коэффициент ξ_a при функции кандидате θ_a учитывает несколько входных параметров и является достаточно большим, его следует дополнительно разложить на несколько составляющих, которые могут быть равномерно разнесены между всеми $L_i(x) \cdot p_{l_i}$, если p_{l_i} входит в θ_a .

Далее представлен эвристический алгоритм разложение ряда, облегчающий переход модели из формы (11) в (12). Для удобства работы полиномиальная модель $L(x)$, множество участвующих в разложении аргументов P , библиотека функций кандидатов θ_a реализованы в алгоритме в виде строковых массивов. В результате, задача параметрического синтеза сводится к решению задачи (10) на основе алгоритмов 1 и 2.

Алгоритм 2 Алгоритм эвристического разложения функциональной зависимости

Вход: $L(x)$ – полиномиальная модель в форме (11), P – множество аргументов p , участвующих в разложении, M – количество параметров, участвующих в разложении.

Выход: $L_i(x)$ – полиномиальные модели из (12).

1. Инициализация $L_i(x) = []$, $i = 1, \dots, M$;
 2. **Цикл** по всем элементам θ_a из $L(x)$;
 3. **Цикл** по всем элементам p_{l_i} из P ;
 4. $\theta'_a = \theta_a$;
 5. **Если** $(\theta'_a \cap p_{l_i}) = \emptyset$
 6. Перейти на новую итерацию цикла по p_{l_i} ;
 7. **Конец если**
 8. Понизить степень элемента p_{l_i} в θ'_a ;
 9. Сформировать множество R не включающее в себя p_{l_i} : $R = P \setminus p_{l_i}$;
 10. **Если** $(\theta'_a \cap R) = \emptyset$ или степень p_{l_i} больше степеней $\forall p_i \in R$ входящих в θ'_a
 11. $L_i(x) = L_i(x) + \xi_a \cdot \theta'_a$;
 12. **Конец если**
 13. **Если** степень p_{l_i} равна степеням $\forall p_i \in R$ входящих в θ'_a
 14. $\xi'_a = \xi_a / M$;
 15. **Цикл** по всем элементам p_{l_k} из P
 16. $\theta'_a = \theta_a$;
 17. Понизить степень элемента p_{l_k} в θ'_a ;
 18. $L_k(x) = L_k(x) + \xi'_a \cdot \theta'_a$;
 19. **Конец цикла**
 20. **Конец если**
 21. Перейти на новую итерацию цикла по θ_a ;
 22. **Конец цикла**
 23. $a = a + 1$;
 24. **Конец цикла**
-

3. Численное моделирование

Проведем численное моделирование для проверки адекватности разработанного метода. В качестве параметров модели, соответствующих (8), использованы характеристики объекта из работы [8]. Тогда аэродинамические коэффициенты подъемной силы и момента тангажа могут быть представлены следующими функциональными зависимостями:

$$\begin{aligned}
c_y(M, \alpha, \delta_B) &= 0,1741 \cdot \alpha + 0,004766 \cdot \alpha^2 - 0,01185 \cdot M \cdot \alpha + \\
&\quad + 0,1155 \cdot \delta_B + 0,0008479 \cdot \alpha \cdot \delta_B - 0,0182 \cdot M \cdot \delta_B, \\
m_z(M, \alpha, \delta_B) &= -0,0294 \cdot \alpha - 0,0006682 \cdot \alpha^2 - 0,005962 \cdot M \cdot \alpha - \\
&\quad - 0,04525 \cdot \delta_B - 0,0005829 \cdot \alpha \cdot \delta_B - 0,007453 \cdot M \cdot \delta_B.
\end{aligned} \tag{13}$$

Выбранные диапазоны определения параметров модели (13) представлены в табл. 1.

Таблица 1.
Диапазоны выходных параметров

Table 1.
Output parameter ranges

Параметр	Наименование	Диапазон	Единицы измерения
1	2	3	4
M	Число Маха	[3 6]	—
α	Угол атаки	[-12 12]	[град]
δ_B	Угол отклонения руля высоты	[-15 15]	[град]

Проведем разложение исходных функций (13) в соответствии с формой (6). Максимальная степень полиномиального члена, участвующего в разложении, составляет $P_{\max} = 4$. Применяя алгоритмы 1 и 2, получим следующие функциональные зависимости:

$$\begin{aligned}
c_y(M, \alpha, \delta_B) &\approx c_{y\alpha}(M, \alpha) \cdot \alpha + c_{y\delta_B}(M, \alpha) \cdot \delta_B, \\
m_z(M, \alpha, \delta_B) &\approx m_{z\alpha}(M, \alpha) \cdot \alpha + m_{z\delta_B}(M, \alpha) \cdot \delta_B,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{y\alpha}(M, \alpha) &= 0,1741 - 0,01185 \cdot M + 0,004766 \cdot \alpha, \\
c_{y\delta_B}(M, \alpha) &= 0,1155 - 0,0182 \cdot M + 0,0008479 \cdot \alpha, \\
m_{z\alpha}(M, \alpha) &= -0,0294 + 0,005962 \cdot M - 0,0006682 \cdot \alpha, \\
m_{z\delta_B}(M, \alpha) &= -0,04525 + 0,007453 \cdot M - 0,0005829 \cdot \alpha.
\end{aligned}$$

Точность полученной аппроксимации (14) относительно исходных данных оценивается по критериям (15) и для равномерно распределенной случайной выборки $n_s = 10^6$ представлена в табл. 2.

$$\begin{aligned}
E_{\max} &= \max_{i=1, \dots, n} \max \left| (k_0 - k_A) k_0^{-1} \right| \cdot 100\%, \\
E_{\text{mean}} &= \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \max \left| (k_0 - k_A) k_0^{-1} \right| \cdot 100\%,
\end{aligned} \tag{15}$$

где n_s – размер случайной выборки, k_0, k_A – исходный и полученный в результате аппроксимации аэродинамические коэффициенты.

Таблица 2.
Точность аппроксимации аэродинамических коэффициентов

Table 2.
Approximation accuracy of aerodynamic coefficients

Ошибка	c_y , [%]	m_z , [%]
1	2	3
Максимальная (E_{\max})	$2,217 \cdot 10^{-10}$	$4,898 \cdot 10^{-9}$
Средняя (E_{mean})	$3,585 \cdot 10^{-12}$	$1,711 \cdot 10^{-11}$

Согласно результатам, полученное разложение (14) по форме (6) обеспечивает высокую точность аппроксимации исходных функций (13). Проведем сравнительный анализ путем численного моделирования исходной нелинейной модели (1) и ее qLPV формы (8). В качестве условий моделирования выбран фиксированный режим с высотой полета $H = 23$ км и числом Маха $M = 5$. Соотношения параметров объекта для такого режима представлены в табл. 3.

Таблица 3.
Соотношение параметров объекта управления на выбранном режиме полета

Table 3.
The ratio of the parameters of the control object in the selected flight mode

Параметр	Значение
$Q \cdot S \cdot L / J_z$	3643,4
$Q \cdot S / m \cdot V$	0,6053
V / g	151,1792
T	0,015

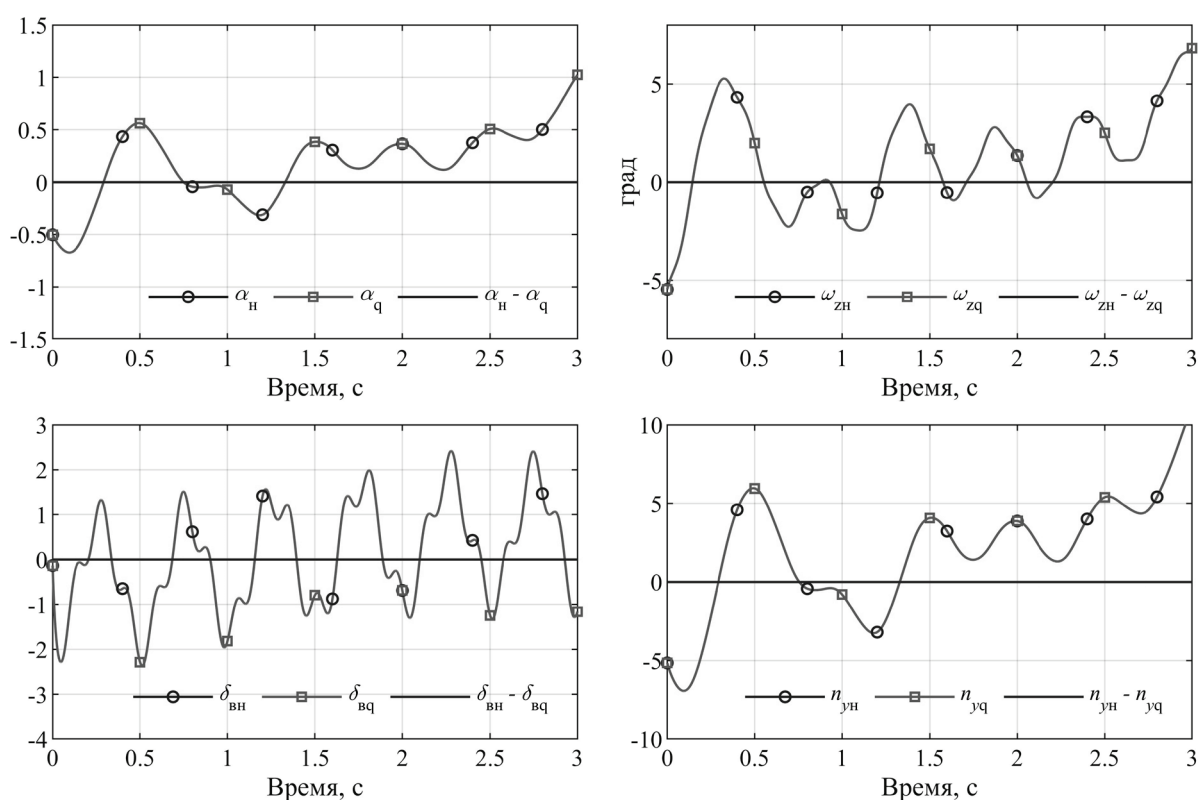


Рис. 1. Моделирование динамик нелинейной модели и ее qLPV формы

Fig. 1. Modeling of the dynamic of the nonlinear model and its qLPV form

Управляющий сигнала на рассматриваемом режиме определен следующим законом:

$$\delta_B^{\text{зад}} = 0,5730 \cdot \sin(6,5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t) + 0,5730 \cdot \cos(0,2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t) + 1,4325 \cdot \cos(2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t).$$

Результат моделирования нелинейной модели (1) с учетом динамики привода (2) и ее qLPV формы (8) представлен на рис. 1. Параметры с индексом «н» соответствуют состоянию и выходу нелинейной модели, а с индексом «q» – qLPV модели. В качестве начальных условий использовалось следующее положение на фазовой плоскости:

$$\alpha_0 = -0,5 \text{ град}, \omega_{z0} = -5,5 \text{ град/с}, \delta_{B0} = 0 \text{ град}.$$

Согласно полученным результатам, динамики исходной нелинейной и qLPV моделей полностью совпадают, что свидетельствует о высокой точности представления нелинейной динамической системы в пространстве состояний с помощью разработанного метода квазилинеаризации.

Заключение

Разработан метод квазилинеаризации нелинейной модели БПЛА с использованием подхода структурно-параметрического синтеза. Предложенный подход основан на аналитическом выводе структуры qLPV модели с последующей идентификацией неизвестных переменных в виде аппроксимации линейной обобщенной моделью посредством решения задачи разреженной регрессии и эвристического разложения. В ходе разработки метода проведена квазилинеаризация нелинейной модели изолированного движения БПЛА в продольном канале относительно центра масс. Результаты численного моделирования показали минимальные ошибки по соответствующим фазовым координатам исходной модели и ее qLPV формы. Полученные результаты позволяют заключить, что разработанный метод обеспечивает высокую точность представления нелинейной динамической системы в виде qLPV модели.

Библиографический список

1. **P. Varanyi**, Y. Yam, P. Varlaki. Tensor Product Model Transformation in Polytopic Modelbased Control. – CRC Press, Florida, 2013.
2. **Гайдук, А.Р.** Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22. № 6. С. 283-290.
3. **Грон, Д.** Методы идентификации систем / Д. Грон. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
4. **Ефремов, А.В.** Динамика полета: учебник для студентов высших учебных заведений / А.В. Ефремов, В.Ф. Захарченко, В.Н. Овчаренко. – М.: Машиностроение, 2011. – 775 с.
5. **K. Kaheman**, J.N. Kutz, S.L. Brunton SINDy-PI: a robust algorithm for parallel implicit sparse identification of nonlinear dynamics. Proceedings of the Royal Society A. 2020. Т. 476. №. 2242. С. 20200279.
6. **Lee J.D.** et al. Communication-efficient sparse regression //Journal of Machine Learning Research. 2017. Т. 18. № 5. С. 1-30.
7. **S.L. Brunton**, J.N. Kutz. Data-driven science and engineering: machine learning, dynamical systems, and control. – Cambridge University Press, 2020.
8. **Xu H.** et al. Four-loop feedback control system with integrator design for hypersonic cruise missile. 21st AIAA international space planes and hypersonics technologies conference. 2017. С. 2112.

**Дата поступления
в редакцию: 30.09.2024**

**Дата принятия
к публикации: 08.10.2024**