



*На правах рукописи*

Малышев Григорий Сергеевич

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РАСЧЁТА ОТКРЫТЫХ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ НАПРАВЛЯЮЩИХ СТРУКТУР  
И ДЛЯ РЕШЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ЗАДАЧ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ**

Специальность 05.12.07 – Антенны, СВЧ устройства и их технологии

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор ф.-м. наук, профессор

Раевский Алексей Сергеевич

Нижний Новгород – 2016

Работа выполнена на кафедре «Физика и техника оптической связи» Института ядерной энергетики и технической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева» (НГТУ).

Научный руководитель: **Раевский Алексей Сергеевич** доктор ф.-м. наук, профессор

Официальные оппоненты: **Смирнов Александр Ильич**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральный исследовательский центр «Институт прикладной физики Российской академии наук», г. Нижний Новгород, заведующий отделом

**Данилов Илья Николаевич**, кандидат технических наук, Федеральное государственное унитарное предприятие федеральный научно-производственный центр «Научно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова», г. Нижний Новгород, старший научный сотрудник

Ведущая организация: Открытое акционерное общество «Федеральный научно-производственный центр «Нижегородский научно-исследовательский приборостроительный институт «Кварц» имени А.П. Горшкова» (г. Нижний Новгород)

Защита состоится «10» ноября 2016 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д212.165.01 на базе Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е.Алексеева по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО НГТУ им. Р.Е. Алексеева и на сайте университета по адресу: <http://www.nntu.ru/content/aspirantura-i-doktorantura/dissertacii>

Автореферат разослан «\_\_» 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Белов Юрий Георгиевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** Открытые электродинамические направляющие структуры со сложной формой поперечного сечения и устройства на их основе находят широкое применение в технике СВЧ, КВЧ и оптического диапазонов волн. Важное место среди таких структур занимают открытые диэлектрические волноводы (ОДВ) с различной формой поперечного сечения, в том числе достаточно сложной. Необходимость расчёта ОДВ со сложной формой поперечного сечения часто возникает в процессе решения задач синтеза функциональных узлов техники СВЧ и КВЧ, устройств интегральной оптики.

Широкое применение на практике находят апертурные антенны и антенны бегущей волны. Проектирование таких антенн связано с решением задачи синтеза функции источника. Эта задача заключается в расчёте распределения электрических и магнитных токов на излучающей поверхности, обеспечивающего заданное (требуемое) поле излучения. При этом важно учитывать обратное влияние поля излучения на первичные источники.

Для расчёта ОДВ, апертурных антенн и антенн бегущей волны возможно применить спектральный метод [Л.1], использование которого позволяет, благодаря отказу от калибровки Лоренца, не накладывать связь на компоненты электромагнитного поля.

В работах [Л.2-Л.3] описываются численные и аналитические методы, позволяющие производить расчёт слабонаправляющих ОДВ. Для расчёта спектра волн ОДВ привлекаются приближенные модели Гоэлла [Л.4], Шлоссера [Л.5], метод геометрической оптики [Л.6]. Лучевой метод даёт хорошие результаты только в высокочастотной области. Для расчётов характеристик ОДВ в высокочастотной области можно использовать модель Шлоссера [Л.5], которая предполагает введение идеально проводящего экрана на некотором удалении от диэлектрического волновода. Однако в поперечном сечении такого экранированного волновода устанавливается поле стоячей волны, в то время как в ОДВ поле должно удовлетворять условию излучения.

Модель Гоэлла [Л.4] основывается на разложении полей по цилиндрическим функциям. Для получения дисперсионного уравнения волн ОДВ используется метод коллокаций, который обеспечивает точное выполнение граничных условий только в узлах коллокации. Метод является интерполяционным и не позволяет достигнуть приемлемой расчётной точности.

Широкое использование ОДВ в качестве базовых элементов функциональных узлов высокочастотных диапазонов, создание строгой теории апертурных антенн требуют решения самосогласованных дифракционных задач об излучении. Это определяет актуальность исследований, проводимых в рамках диссертации.

### **Цели работы:**

1. Исследование возможностей спектрального метода при расчёте ОДВ сложного поперечного сечения и решении самосогласованной задачи об излучении.

2. Разработка метода решения обратной антенной задачи (отыскание распределения первичных токов на поверхности излучения по заданному полю излучения).

В соответствии с поставленными целями автором в рамках диссертации решались **следующие задачи**:

1. Расчёт характеристик распространения волн круглых ОДВ двумя методами – спектральным методом и методом частичных областей.

2. Проведение сравнительного анализа возможностей спектрального и лучевого методов применительно к расчёту дисперсионных характеристик волн ОДВ с прямоугольным поперечным сечением.

3. Расчёт спектральным методом характеристик распространения волн ОДВ с крестообразным поперечным сечением.

4. Постановка самосогласованной задачи об излучении.

5. Решение самосогласованной задачи об излучении из круглого отверстия в идеально проводящем бесконечном экране.

6. Синтез функции источника излучения, создающего заданное (требуемое) поле излучения с торца круглого ОДВ.

**Научная новизна диссертации состоит в следующем:**

1. Сформулирована самосогласованная задача об излучении.

2. Для решения самосогласованной задачи об излучении впервые применен спектральный метод.

3. Решена задача о построении базиса для представления функции источника излучения в открытое пространство с учётом обратного влияния на источник поля излучения.

4. Решена обратная антенная задача, поставленная на базе самосогласованной задачи об излучении.

5. Решена краевая задача о распространении волн ОДВ с крестообразным поперечным сечением.

**Теоретическая значимость работы.** Разработана схема строгого расчёта апертурных антенн. Показана принципиальная возможность построения с помощью спектрального метода базиса для представления функции источника излучения с учётом обратного влияния поля излучения на этот источник. Основные положения, сформулированные при постановке самосогласованной задачи, использованы для решения задачи синтеза функции источника излучения. Показана применимость метода коллокаций к решению самосогласованной задачи об излучении и задачи синтеза функции источника излучения. Показана корректность применения лучевого метода для расчёта ОДВ в высокочастотной области.

**Практическая значимость работы.** Разработан новый метод решения обратной антенной задачи, учитывающий влияние поля излучения на источник излучения. На основе этого метода составлены алгоритм и программа, позволяющие рассчитывать распределение полей на излучающей поверхности, создающее требуемое поле излучения. Результаты исследований, представленные в диссертации, применены для решения задачи формирования распределённого по заданному закону поля на апертуре диэлектрической антенны

радиоинтерферометра, используемого для исследования быстропротекающих процессов.

Разработана программа для расчёта дисперсионных характеристик волн ОДВ с произвольной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечных координат. Программа позволяет производить расчёты с учётом материальной дисперсии. С использованием данной программы были определены параметры световодов, при которых коэффициент дисперсии обращается в нуль на заданной длине волны в области прозрачности кварцевого стекла.

Определены требования к выбору геометрических размеров поперечного сечения и диэлектрической проницаемости ОДВ с крестообразным поперечным сечением для обеспечения необходимой ширины области одномодовости такого ОДВ.

Результаты, представленные в диссертационной работе, использовались при выполнении кафедрой «Физика и техника оптической связи» НГТУ им. Р.Е. Алексеева госбюджетной НИР по ГК № 02.740.11.0552 от 22.03.2010 г. «Численно-аналитические методы расчёта электродинамических характеристик направляющих структур оптического диапазона и функциональных устройств на их основе» в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

Результаты расчётов и алгоритмы, представленные в диссертации, были использованы в опытно-конструкторских работах по проектированию аппаратуры спутниковой навигации, а также систем бесконтактного зондирования быстропротекающих процессов, проводившихся во ФГУП «ФНЦП НИИИС им. Ю.Е. Седакова» в 2014 и 2015 годах. Акты внедрения прилагаются к диссертации.

**Методы исследований.** Представленные в диссертации результаты получены с помощью спектрального метода, предполагающего отказ от калибровки Лоренца. Для алгебраизации систем интегральных уравнений, полученных в процессе решения самосогласованной задачи об излучении и задачи синтеза источника, использовался метод коллокаций. Для поиска корней характеристических уравнений использовался метод половинного деления. При расчёте элементов матрицы системы алгебраических уравнений, полученной с помощью метода коллокаций, использовались численные методы расчёта несобственных интегралов. В процессе расчёта элементов матрицы дисперсионного уравнения волн ОДВ, полученного спектральным методом, использовалась формула Гаусса для численного интегрирования.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Формулировка спектрального метода в приложении к расчёту открытых направляющих структур.
2. Определение возможностей использования спектрального метода для расчёта ОДВ.
3. Доказательство корректности использования лучевого метода для исследования ОДВ с прямоугольным поперечным сечением путём сравнения результатов расчёта дисперсионных характеристик волн данного ОДВ спектральным и лучевым методами.

4. Результаты исследования характеристик ОДВ с большим количеством варьируемых параметров поперечного сечения.

5. Постановка самосогласованной задачи об излучении апертурных антенн.

6. Построение базиса внешней неоднородной краевой задачи из собственных функций самосогласованной задачи об излучении.

7. Решение задачи синтеза функции источника излучения, создающего заданное поле излучения с торца круглого ОДВ.

#### **Обоснованность и степень достоверности результатов работы.**

Обоснованность и достоверность положений и результатов, представленных в диссертации, подтверждаются удовлетворением полученной системы интегральных уравнений принципу двойственности. Достоверность расчётов дисперсионных характеристик волн ОДВ подтверждается совпадением численных результатов, полученных различными методами. При решении методом коллокаций задачи синтеза источника излучения была показана устойчивость решений по отношению к расположению узлов коллокации. Полученные результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях и обсуждались на научно-технических конференциях.

**Публикации и апробация работы.** По материалам диссертации были опубликованы 19 печатных работ, из которых 8 - в журналах, включенных ВАК в перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Материалы диссертации обсуждались на научно-технических конференциях различного уровня:

- МНТК «Прикладная электродинамика. Фотоника. Живые системы». – Казань: КНИТУ-КАИ, 2013;

- МНТК «Физика и технические приложения волновых процессов». – Самара, 2011; Екатеринбург, 2012;

- МНТК «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». – Украина, Севастополь, 2013.

#### **Личное участие автора в получении научных результатов:**

1. Продемонстрирована принципиальная возможность расчёта собственных значений и собственных функций самосогласованная задача об излучении апертурных антенн с помощью спектрального метода.

2. Поставлена и решена задача синтеза функции источника излучения, создающего заданное (требуемое) поле излучения антенны в виде разомкнутого конца ОДВ.

3. Разработан алгоритм для расчёта дисперсионных характеристик и коэффициентов дисперсии волоконных световодов с произвольной зависимостью концентрации легирующих добавок по радиальной координате.

На программу, составленную на основе разработанного соискателем алгоритма расчета коэффициентов дисперсии волоконных световодов, получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011611210.

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы из 104 наименований и приложения

с двумя актами внедрения. Общий объём работы составляет 196 страниц. Диссертация содержит 118 рисунков и 1 таблицу.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** формулируется программа исследований и ставится цель диссертационной работы, указываются её актуальность, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, обосновывается достоверность полученных результатов. Представляются основные положения, выносимые на защиту. Описывается структура и объём работы. Дается краткое изложение содержания диссертационной работы.

**В первой главе** проводится сравнительный анализ методов расчёта ОДВ. Формулируются основные положения спектрального метода в применении к расчёту характеристик волн ОДВ.

При решении подавляющего большинства краевых задач электродинамики связь между компонентами электромагнитного поля устанавливается с помощью калибровки Лоренца. Если калибровка Лоренца не накладывается, допускаются независимые разложения электрического и магнитного полей по произвольным базисам [Л.1]. Связь между компонентами может устанавливаться, например, с помощью процедуры Галёркина, применяемой к уравнениям Максвелла.

В качестве примера рассматривается использование спектрального метода [Л.7] для расчёта ОДВ с произвольным поперечным сечением (рис. 1). В пределах области  $\bar{S}$  (рис. 1) диэлектрическая проницаемость задаётся функцией  $\bar{\varepsilon}(x, y)$ . В окружающем пространстве  $S_{\text{вн}}$  диэлектрическая проницаемость имеет значение  $\varepsilon_{\text{вн}}$ , не зависящее от поперечных координат.

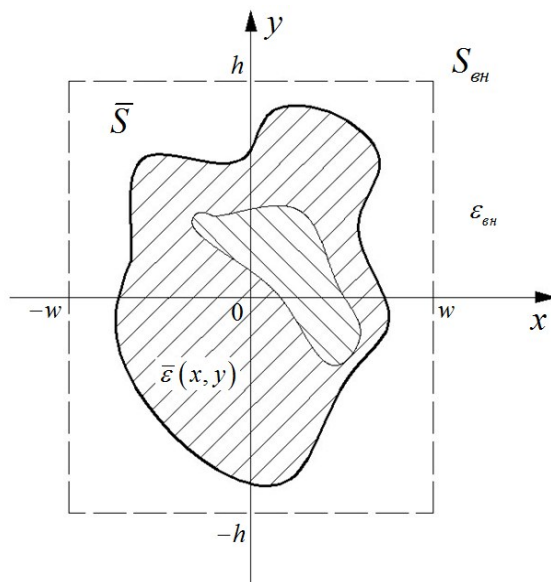


Рис. 1

Компоненты электрического поля в такой структуре должны удовлетворять уравнениям Максвелла, решения которых для компонент электрического поля представляются [Л.8] в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned}
E_x(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(\rho, \kappa) e^{-i\rho x} e^{-i\kappa y} d\rho d\kappa; \\
E_y(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\rho, \kappa) e^{-i\rho x} e^{-i\kappa y} d\rho d\kappa; \\
E_z(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\rho, \kappa) e^{-i\rho x} e^{-i\kappa y} d\rho d\kappa.
\end{aligned} \tag{1}$$

Интегралы (1) подставляются в систему уравнений относительно компонент электрического поля, следующую из системы уравнений Максвелла. Каждое уравнение полученной системы умножается на  $e^{i\xi x} \cdot e^{i\zeta y}$  и интегрируется по переменным  $x$  и  $y$  в бесконечных пределах. Получается система трех однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно амплитудных функций  $a(\rho, \kappa)$ ,  $b(\rho, \kappa)$  и  $c(\rho, \kappa)$ .

Согласно спектральному методу [Л.7], неизвестные функции  $a(\rho, \kappa)$ ,  $b(\rho, \kappa)$  и  $c(\rho, \kappa)$  ищутся в виде автономных разложений по полиномам Эрмита с экспоненциальными весовыми функциями:

$$\begin{aligned}
a(\rho, \kappa) &= \sum_{n=0}^N a_n e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}} e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}} H_{k_n}(\alpha\rho) H_{m_n}(\chi\kappa); \\
b(\rho, \kappa) &= \sum_{n=0}^N b_n e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}} e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}} H_{k_n}(\alpha\rho) H_{m_n}(\chi\kappa); \\
c(\rho, \kappa) &= \sum_{n=0}^N c_n e^{-\frac{(\alpha\rho)^2}{2}} e^{-\frac{(\chi\kappa)^2}{2}} H_{k_n}(\alpha\rho) H_{m_n}(\chi\kappa),
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $N = (\bar{N} + 1)^2 - 1$ , а индексы  $k_n$  и  $m_n$  определяются как  $m_{p+(\bar{N}+1)r} = p$ ,  $k_{p+(\bar{N}+1)r} = r$ ,  $p = 0, 1, \dots, \bar{N}$ ,  $r = 0, 1, \dots, \bar{N}$ .  $\alpha = \chi = 1/k_0$ , где  $k_0$  - волновое число свободного пространства.  $\alpha$  и  $\chi$  вычисляются для какой-нибудь одной частоты. Ряды (2) подставляются в систему интегральных уравнений, алгебраизация которой производится с использованием свойства ортогональности полиномов Эрмита [Л.9]. В результате получается система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения  $a_n$ ,  $b_n$  и  $c_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Матрица системы имеет размерность  $3(N+1) \times 3(N+1)$ . Приравнивание её определителя нулю даёт дисперсионное уравнение волн ОДВ. Блочные матрицы, формирующие матрицу системы, имеют размерность  $(N+1) \times (N+1)$  и, за исключением элементов одной из матриц, которые вычисляются по формулам

$$W_{q,n} = 4\pi^2 \frac{(-i)^{k_n+m_n} i^{k_q+m_q}}{(\alpha\chi)^2} \int_{-h}^h \int_{-w}^w (\bar{\varepsilon}(x, y) - \varepsilon_{en}) e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\chi^2}\right)} H_{k_n}\left(\frac{x}{\alpha}\right) H_{k_q}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot H_{m_n}\left(\frac{y}{\chi}\right) H_{m_q}\left(\frac{y}{\chi}\right) dx dy, \tag{3}$$

не зависят ни от параметров диэлектрического волновода, ни от частоты, что позволяет рассчитывать их (в заданном приближении  $\bar{N}$ ) один раз.

С помощью спектрального метода исследуются дисперсионные характеристики волн ОДВ со сложным поперечным сечением. В качестве примера таких ОДВ рассмотрены ОДВ с крестообразными сечениями (рис. 2). Показатель преломления материала ОДВ составляет  $n=1.46$ . Дисперсионные характеристики первых двух волн этих ДВ показаны на рис. 2. Они сравниваются с



дисперсионными характеристиками волн прямоугольного ОДВ (линии 1 на рис. 2), сечение которого закрывает сечение крестообразного волновода.

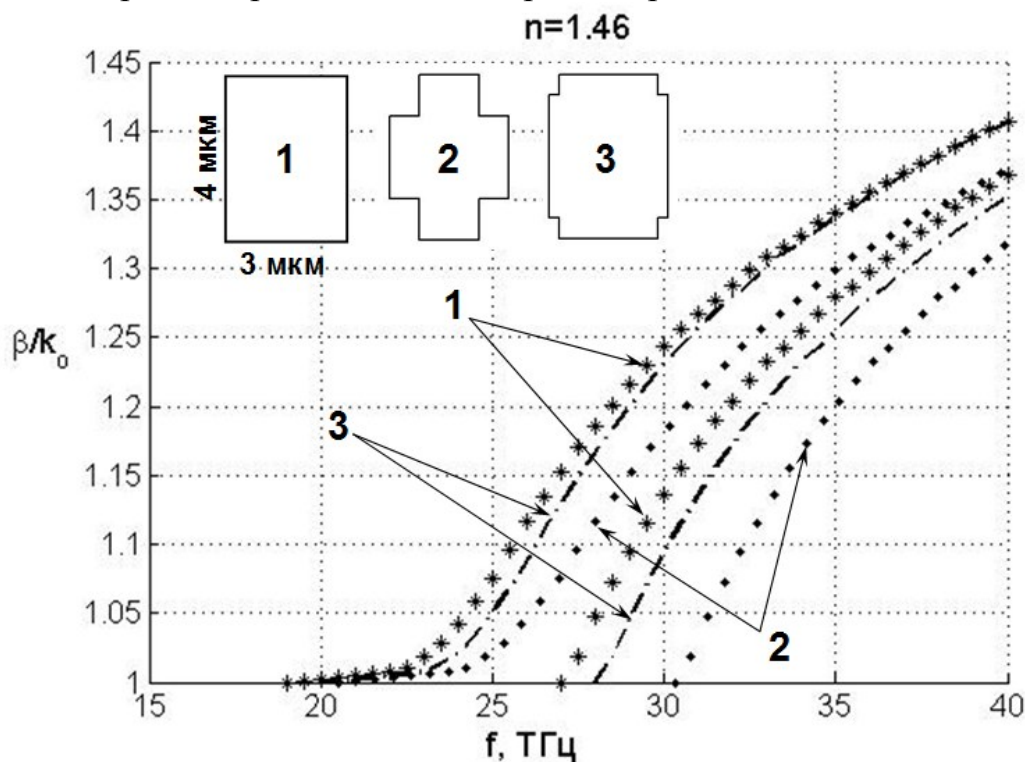


Рис. 2

С помощью численных экспериментов было установлено, что варьирование геометрических размеров поперечного сечения и изменение функции  $\bar{\epsilon}(x,y)$  могут приводить к увеличению области одномодовости, а также к качественным изменениям в поведении дисперсионных характеристик. В частности, на дисперсионных характеристиках волн высших типов появляются точки перегиба, в которых коэффициент дисперсии обращается в нуль.

**Во второй главе** проводится сравнительный анализ возможностей спектрального метода и метода частичных областей (МЧО) применительно к расчёту дисперсионных характеристик волн круглого ОДВ. Показывается, что при расчёте дисперсионной характеристики основной волны круглого градиентного ОДВ спектральный метод обладает большим быстродействием по сравнению с МЧО.

Метод частичных областей позволяет получить строгое решение задачи о расчёте спектра волн круглого многослойного ОДВ [Л.10]. Поэтому совпадение результатов, полученных спектральным методом и МЧО, подтверждает перспективность применения спектрального метода при анализе ОДВ.

В качестве примера рассматривается градиентный волоконный световод с треугольным профилем показателя преломления (ППП) сердцевинны, радиус которой выбирается равным  $a=5$  мкм. Для расчёта такого ОДВ методом частичных областей производится ступенчатая аппроксимация ППП. Спектральный метод не требует многоступенчатой аппроксимации ППП. Быстродействие спектрального метода во многом определяется скоростью вычисления интегралов (3).

На рис. 3 показан процесс сходимости решений дисперсионного уравнения ОДВ для волн типа  $HE_{1m}$  и  $EH_{1m}$ , полученного спектральным методом. Сплошной линией показаны зависимости, полученные с помощью МЧО. Штрих - пунктирной и штриховой линиями показаны дисперсионные характеристики, полученные спектральным методом для  $\bar{N} = 8$  и  $\bar{N} = 14$ , соответственно. При  $\bar{N} = 18$  дисперсионные характеристики, рассчитанные двумя методами, совпадают.

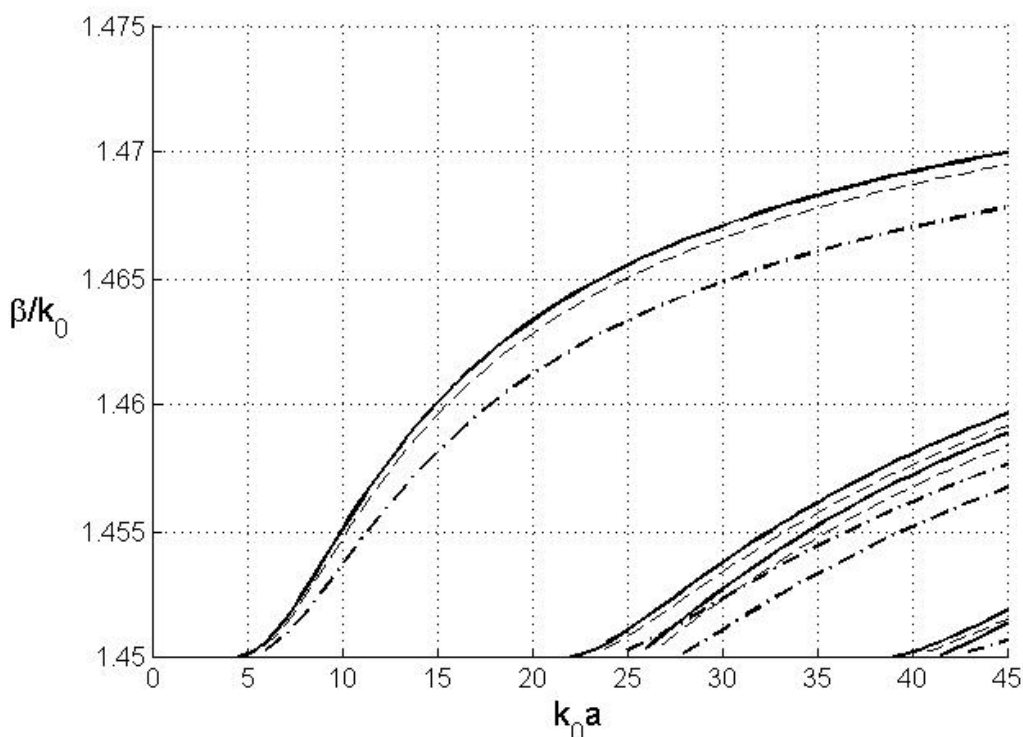


Рис. 3

Время вычислений, которое затрачивается на расчёт дисперсионных характеристик спектральным методом и МЧО, вообще говоря, сопоставимо. Однако, при расчёте дисперсионной характеристики основной волны спектральный метод обладает несколько большим быстродействием по сравнению с МЧО.

Одной из наиболее важных характеристик одномодовых световодов является коэффициент дисперсии, который определяется [Л.11] как  $d^2\beta/d\omega^2$ , где зависимость  $\beta(\omega)$  - дисперсионная характеристика основной волны  $HE_{11}$ . Вторая производная по частоте  $\omega$  берётся численно. При расчёте коэффициента дисперсии [Л.11] необходимо уже на начальных этапах решения дисперсионного уравнения учитывать материальную дисперсию (зависимость показателя преломления от длины волны). Из формулы (3) следует, что в случае учёта дисперсии материала компоненты  $W_{q,n}$  матрицы  $W$  будут зависеть от частоты и вычисляться всякий раз для каждой новой длины волны. Как следствие время расчёта коэффициентов дисперсии градиентных световодов с помощью спектрального метода существенно возрастёт. Поэтому для расчёта зависимости коэффициента дисперсии градиентных световодов от длины волны целесообразно использовать МЧО. Тем не менее, если поперечное сечение ОДВ не является круглым, этот метод уже не применим, в то время как спектральный метод

возможно использовать для ОДВ с произвольным поперечным сечением. Более того, если сечение можно разбить на небольшое число областей, в пределах которых концентрация легирующих добавок неизменна, спектральный метод сохранит своё быстрое действие даже в случае учёта материальной дисперсии.

С помощью МЧО рассчитаны зависимости коэффициентов дисперсии градиентных волоконных световодов от длины волны. Установлено, что даже незначительные изменения параметров световода приводят к существенным сдвигам зависимости коэффициента дисперсии от длины волны. Это свойство позволило решить задачу параметрического синтеза, когда по заданной зависимости коэффициента дисперсии от длины волны определяются параметры самого световода. Ограниченным перебором параметров световода удалось подобрать такие параметры, при которых коэффициент дисперсии обращается в нуль на заданной длине волны в области прозрачности кварцевого стекла.

Возможность быстрого расчёта зависимости коэффициента дисперсии от длины волны позволила в рамках настоящей диссертации рассмотреть задачу о дисперсионном уширении гауссовых и супергауссовых импульсов малой длительности. Показывается, что импульсы с широким спектром испытывают несимметричное дисперсионное уширение даже в том случае, если несущая длина волны соответствует нулю дисперсии. Это обусловлено изменением коэффициента дисперсии волоконного световода в пределах ширины спектра импульса.

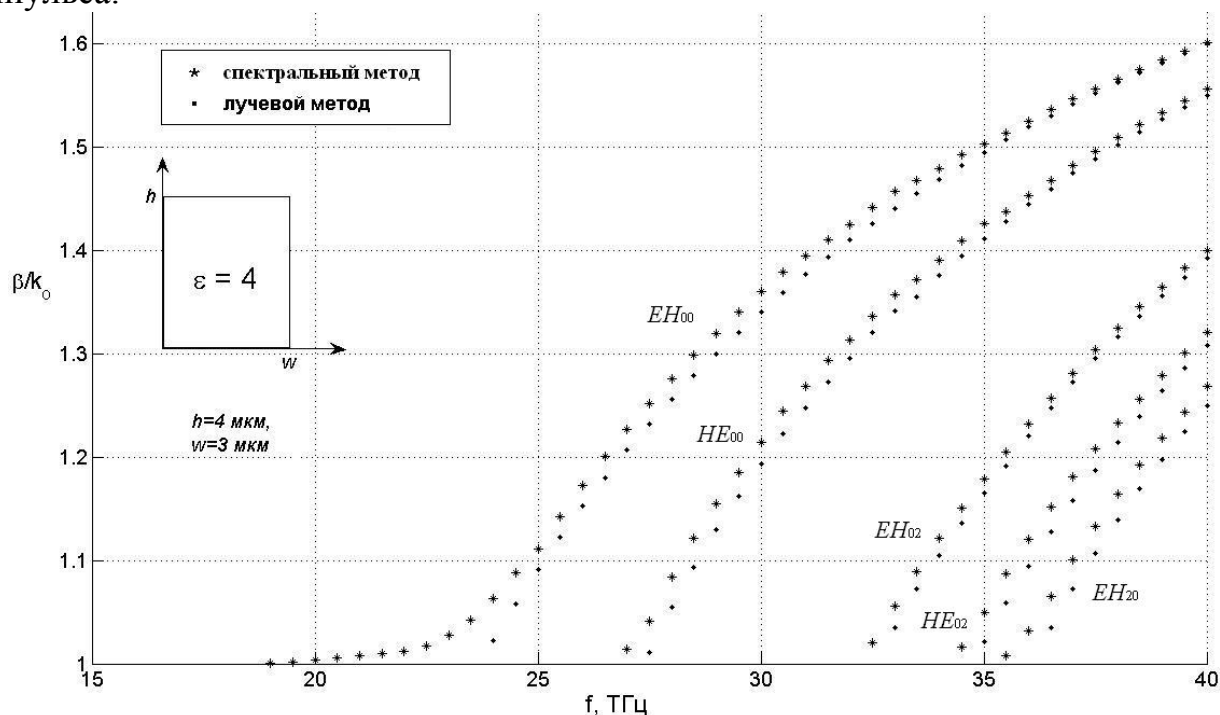


Рис. 4

Совпадение результатов, полученных для круглых ОДВ спектральным методом и МЧО, подтверждает корректность и действенность спектрального метода при анализе ОДВ. Поэтому спектральный метод используется для проверки корректности приближённого лучевого метода при исследовании ОДВ с прямоугольным поперечным сечением, так как применительно к таким волноводам лучевой метод приводит к дисперсионным уравнениям предельно

простой структуры. Поэтому важно убедиться в достоверности результатов, даваемых лучевым методом.

Для основной волны полоскового волновода в области низких частот спектральный и лучевой методы дали не только количественное, но и качественное отличие (рис. 4) - на дисперсионной характеристике основной волны, рассчитанной спектральным методом, имеется «стелящийся» участок в низкочастотной области. В высокочастотной области имеет место хорошее совпадение дисперсионных характеристик (рис. 4), рассчитанных лучевым и спектральным методами, что говорит о применимости лучевого метода для исследования ОДВ в верхнем участке частотного диапазона.

**В третьей главе** ставится самосогласованная задача об излучении с плоской апертуры. Показывается, что задача приводит к однородным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода, то есть является задачей на собственные функции и собственные значения. Найденные собственные функции представляют собой базис внешней краевой задачи излучения. Исследуется применение спектрального метода для расчёта спектра собственных функций внешней однородной краевой задачи.

Самосогласованная задача формулируется в виде замкнутого цикла: поле излучения вычисляется через неизвестное поле на поверхности излучения  $S_0$  и подставляется в граничные условия на этой поверхности. В результате получается [Л.12] система двух векторных интегральных уравнений относительно тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на излучающей поверхности  $S_0$ :

$$\begin{cases} \vec{E}_\tau = \frac{1}{4\pi} \left[ -i\omega\mu \int_{S_0} \vec{H}_\tau \frac{e^{-ik\vec{r}}}{r} dS + \text{rot} \left( \int_{S_0} \vec{E}_\tau \frac{e^{-ik\vec{r}}}{r} dS \right), \vec{z}_0 \right], \\ \vec{H}_\tau = \frac{1}{4\pi} \left[ i\omega\varepsilon \int_{S_0} \vec{E}_\tau \frac{e^{-ik\vec{r}}}{r} dS + \text{rot} \left( \int_{S_0} \vec{H}_\tau \frac{e^{-ik\vec{r}}}{r} dS \right), \vec{z}_0 \right], \end{cases} \quad (4)$$

где  $\vec{r}$  - вектор, направленный из элементарной площадки с током на поверхности  $S_0$  в точку наблюдения,  $\vec{R}$  - радиус-вектор точки наблюдения. Модули векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{R}$  связаны соотношением:

$$r = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \gamma},$$

где  $\rho$  - модуль радиус-вектора  $\vec{\rho}$  элементарного тока на поверхности  $S_0$ ,  $\gamma$  - угол между векторами  $\vec{\rho}$  и  $\vec{R}$ . Интегральные уравнения (4) однородные. Таким образом, имеем задачу на собственные функции и собственные значения.

Если излучающая поверхность  $S_0$  является плоской, из (4) получаются две системы однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно компонент поля в плоскости  $S_0$ :

$$\begin{cases} E_\rho = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty H_\varphi \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi_0, & E_\varphi = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty H_\rho \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi_0, \\ H_\varphi = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E_\rho \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi_0, & H_\rho = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E_\varphi \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi_0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $r_o = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi_o)}$ .

В качестве примера рассматривается однородная краевая задача об излучении из круглого отверстия в идеально проводящем экране. Решения систем уравнений (5) образуют базис, по которому можно производить разложение функций поля первичных источников.

Для решения этих уравнений используется спектральный метод, согласно которому в уравнениях (5) компоненты поля представляются в виде автономных разложений. Исходя из физических соображений, эти разложения должны удовлетворять трём обязательным условиям: условию на ребре [Л.13] (на краях отверстия радиуса  $a$ ), нулевому условию на бесконечности при  $\rho \rightarrow \infty$  (условие Зоммерфельда), условию на идеально проводящей поверхности. Поэтому компоненты полей систем (5) представляются в виде разложений:

$$E_\rho(R, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^N A_m \cdot J_n \left( \gamma \frac{\alpha_m^{(n)}}{a} R \right) \cdot \cos(\bar{n}\varphi), & R \leq a, \\ 0, & R > a; \end{cases} \quad (6)$$

$$E_\varphi(R, \varphi) = \begin{cases} \sum_{m=0}^N B_m \cdot J_{-1/2} \left( \gamma \frac{\alpha_m^{(-1/2)}(a-R)}{a} \right) \cdot \sin(\bar{n}\varphi), & R \leq a, \\ 0, & R > a; \end{cases} \quad (7)$$

$$H_\rho(R, \varphi) = \sum_{m=0}^N C_m \cdot L_m \left( \beta \frac{R}{a} \right) \cdot e^{-R/a} \cdot \sin(\bar{n}\varphi); \quad (8)$$

$$H_\varphi(R, \varphi) = \sum_{m=0}^N G_m \cdot L_m \left( \beta \frac{R}{a} \right) \cdot e^{-R/a} \cdot \cos(\bar{n}\varphi), \quad (9)$$

где число  $N$  определяет порядок приближения;  $L_m(x)$  – функции параболического цилиндра. Число  $\bar{n}$ , вообще говоря, не равно  $n$ .

Подставка разложений (6) – (9) в системы (5) даёт две системы интегральных уравнений, для алгебраизации которых можно использовать метод коллокаций [Л.14]. Системы записываются в точках

$$(R_i, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, (N+1),$$

где  $i$  – номер точки  $(R_i, \varphi_i)$ , которые являются узлами коллокации. Угловые координаты  $\varphi_i$  задаются из сегмента  $[0, 2\pi]$ , радиальные  $R_i$  задаются в интервале  $R \in [0 \div a]$ . Таким образом, получаются системы уравнений размером  $2(N+1) \times 2(N+1)$  относительно неизвестных коэффициентов  $A_m$  и  $G_m$  ( $B_m$  и  $C_m$ ),  $m = 0, 1, \dots, N$ .

Проведённая с помощью метода коллокаций алгебраизация приводит к двум системам линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений полей. Условия нетривиальности их решений дают два трансцендентных уравнения относительно параметров  $\gamma$  и  $\beta$  разложений полей (6) – (9), являющихся собственными значениями задачи. Совместное решение этих уравнений позволяет определить собственные функции задачи.

Для каждого фиксированного  $\gamma$  получаются свои корни  $\beta$ . Двигаясь с некоторым шагом по  $\gamma$ , получаем «траектории движения» корней на плоскости

$(\gamma, \beta)$ . Так как имеются два трансцендентных уравнения – одно из первой системы (5), другое из второй системы (5), – получаются два независимых семейства «траекторий» на плоскости  $(\gamma, \beta)$ , каждое из которых соответствует своему уравнению. Решениями задачи будут точки  $(\gamma_k, \beta_k)$  пересечения этих кривых, которые (точки пересечения) позволяют связать решения систем.

Задача решалась для случая трёх узлов коллокации, которые задавались в одном случае на окружности, в другом – по радиусу. Найдены совместные решения характеристических уравнений, что говорит о существовании собственных значений краевой задачи на системах однородных интегральных уравнений (5). После расчёта собственных значений  $\gamma_k$  и  $\beta_k$  были определены неизвестные коэффициенты  $A_m, G_m$  и  $B_m, C_m, m=0,1,\dots,N$  разложений (6) – (9), а затем рассчитаны поля в плоскости  $S_o$ . Для каждого пересечения  $(\gamma_k, \beta_k)$  получены свои распределения полей.

Было установлено, что независимо от выбора расположения узлов коллокации качественная зависимость поля от радиальной координаты сохраняется. Для действительных составляющих компонент полей сохраняются также и количественные значения.

**В четвёртой главе** решается задача синтеза функции источника, приводящая к системе неоднородных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Формулируется задача поиска функции распределения поля на конце круглого открытого диэлектрического волновода (ОДВ), обеспечивающей заданное распределение поля излучения. При этом функция источника синтезируется на основе спектра волн круглого ОДВ.

Задача синтеза функции источника, создающего заданное поле излучения, сформулирована на основе самосогласованной задачи об излучении. В этом случае в интегральных уравнениях (5) свободные функции полагаются заданными, а искомые функции источника, создающего заданное поле, входят под знак интеграла. В результате от системы однородных интегральных уравнений второго рода переходим к системе неоднородных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. При этом исходная самосогласованность краевой задачи позволяет учитывать обратное влияние поля излучения на источник.

Задача синтеза функции источника излучения решалась для случая, когда источник создаёт поле излучения, распределённое по гауссову закону:

$$E_\rho(R, \varphi) = A e^{-\gamma(R/a)^2} \cos(n\varphi), \quad H_\varphi(R, \varphi) = B e^{-\gamma(R/a)^2} \sin(n\varphi); \quad (10)$$

$$E_\varphi(R, \varphi) = B \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} e^{-\gamma(R/a)^2} \sin(n\varphi), \quad H_\rho(R, \varphi) = A \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e^{-\gamma(R/a)^2} \cos(n\varphi). \quad (11)$$

Левые части интегральных уравнений рассматриваются как поля, создаваемые источником, и полагаются заданными (требуемыми).

Для поиска амплитуд собственных волн, в правых частях уравнений (5) в качестве полей  $H_\varphi, E_\rho, H_\rho$  и  $E_\varphi$  берутся суммы соответствующих компонент полей собственных волн круглого ОДВ:

$$E_\rho = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} E_\rho^{(m)}, \quad H_\rho = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} H_\rho^{(m)}, \quad H_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} H_\varphi^{(m)}, \quad E_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} E_\varphi^{(m)},$$

где индекс  $m$  - номер корня дисперсионного уравнения ОДВ. На открытом конце круглого ОДВ присутствуют поля всего спектра его собственных волн. Несобственные волны, амплитуда которых возрастает при удалении от оси ОДВ, не учитываются. Подразумевается, что несобственные волны локализируются вблизи источника, пространственно удалённого от торца волновода (в данном случае по оси ОДВ), и поэтому не участвуют в формировании поля излучения.

Из первой системы (5) получаем:

$$\begin{cases} Ae^{-\gamma(R/a)^2} \cos(n\varphi) = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \sum_{m=1}^M A_{1m} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty H_\varphi^{(m)} \frac{e^{-ikr_o}}{r_o} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi_o, \\ Be^{-\gamma(R/a)^2} \sin(n\varphi) = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \sum_{m=1}^M A_{1m} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E_\rho^{(m)} \frac{e^{-ikr_o}}{r_o} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi_o. \end{cases} \quad (12)$$

В системе (12) бесконечный предел суммирования заменён на конечный, так как для заданных частоты и индекса  $n$  берётся конечное число  $M$  корней дисперсионного уравнения волн круглого ОДВ. Для поиска коэффициентов разложения  $A_{1m}$  используется метод коллокаций [Л.14].

Расчёт амплитудных коэффициентов  $A_{1m}$  и сумм в правых частях системы (12) производился для следующих параметров:  $A=1$ ,  $B=1$ ,  $\gamma=6$  - коэффициенты в выражениях (10);  $a=6$  мм – радиус ОДВ;  $n=1$  - азимутальный индекс волн ОДВ;  $\tilde{\varepsilon}_1=2.04$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2=1$  - относительные диэлектрические проницаемости внутреннего слоя ОДВ и окружающей среды, соответственно;  $f=185$  ГГц – частота, для которой производился расчёт.

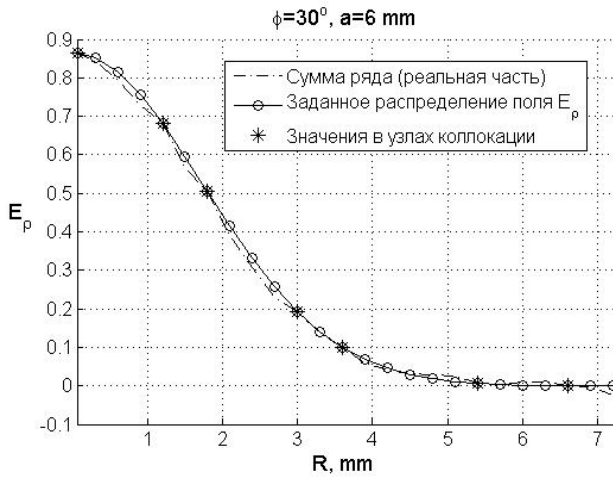


Рис. 5

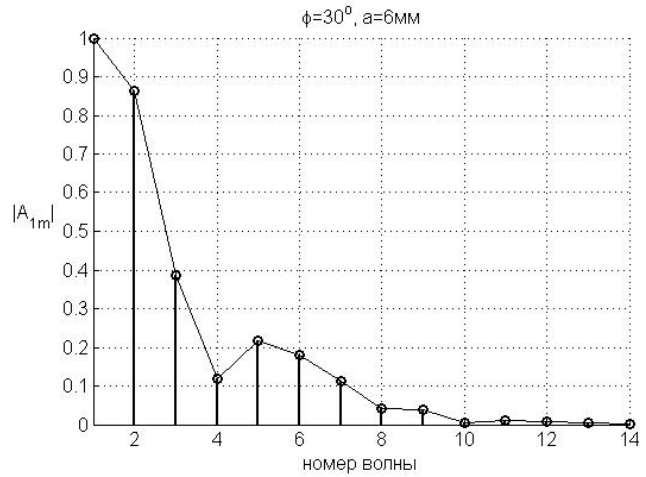


Рис. 6

Задача синтеза функции источника решалась для случаев четырёх, пяти, шести и семи узлов коллокации. Сравнивались результаты суммирования членов ряда в правых частях системы (12) с заданным распределением полей (10). На рис. 5 показаны зависимости, полученные для случая семи узлов коллокации, расположенных вдоль одного луча  $\varphi=\pi/6$ . Видно, что в данном случае наблюдается хорошее количественное приближение поля к заданному распределению (10). Мнимая часть суммы ряда практически обращается в нуль.

Таким образом, метод коллокации способен обеспечить приемлемый уровень приближения поля к (10) и высокую точность решения системы уравнений (12).

Зависимости модуля амплитудных коэффициентов волн от номера корня дисперсионного уравнения для случая семи узлов коллокации представлены на рис. 6.

В случае азимутально симметричного поля, естественно, производится коллокация по  $R$ , когда узлы коллокации задаются при фиксированной (произвольной) угловой координате. При расчёте амплитуд собственных волн поля  $H_\varphi$ ,  $E_\rho$ ,  $H_\rho$  и  $E_\varphi$  в уравнениях (5) под знаком интеграла записываются в виде сумм соответствующих компонент симметричных волн круглого ОДВ:

$$E_\rho = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} E_\rho^{(m)}, \quad H_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} H_\varphi^{(m)}, \quad E_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} B_{1m} E_\varphi^{(m)}, \quad H_\rho = \sum_{m=1}^{\infty} B_{1m} H_\rho^{(m)}.$$

Первая пара рядов представляет собой разложения компонент полей  $E$ -волн. Вторая пара – компонент полей  $H$ -волн. В левые части систем (5) подставляются выражения, аналогичные (10) и (11), но с отсутствующей зависимостью по азимутальной координате. Получаются две независимые системы уравнений, первая из которых соответствует базису из  $E$ -волн, а вторая – базису из  $H$ -волн.

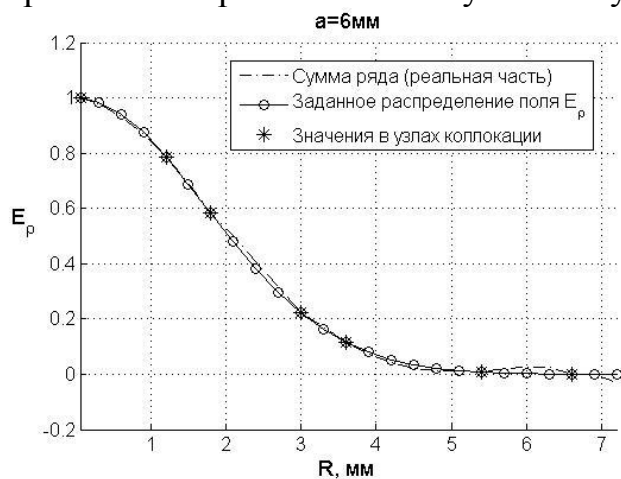


Рис. 7

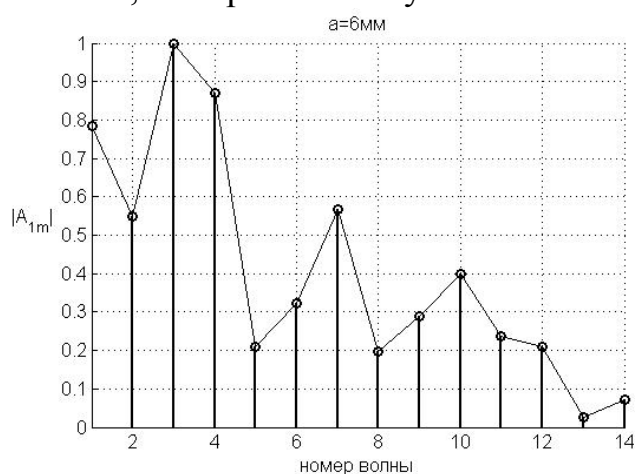


Рис. 8

В случае использования семи узлов коллокации наблюдается количественное совпадение суммы ряда с заданным распределением поля (рис. 7). Зависимость модуля амплитудных коэффициентов  $E$ -волн от номера корня дисперсионного уравнения представлена на рис. 8. Параметры ОДВ задавались прежними, расчёт производился для частоты  $f = 350$  ГГц.

В четвёртой главе показывается, что для задачи о синтезировании функции источника излучения в виде конца круглого диэлектрического волновода метод коллокаций обеспечивает устойчивость решений по отношению к расположению узлов коллокации.

**В заключении** формулированы основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертации.

**В приложении** приведены акты внедрения результатов диссертации.



## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Спектральный метод применён к решению самосогласованных задач об излучении.
2. Проведён сравнительный анализ возможностей спектрального метода и МЧО применительно к расчёту дисперсионных характеристик волн круглого ОДВ
3. На примере ОДВ с прямоугольным поперечным сечением подтверждена корректность применения лучевого метода для расчёта в высокочастотной области.
4. Продемонстрированы возможности спектрального метода при расчёте дисперсионных характеристик волн открытых направляющих структур на примере ОДВ с крестообразным поперечным сечением.
5. Установлено, что выбором геометрических размеров поперечного сечения крестообразного ОДВ, а также функции распределения диэлектрической проницаемости по поперечному сечению возможно увеличение области одномодовости по сравнению с ОДВ, имеющим прямоугольное сечение. По сравнению с полосковым волноводом, на характеристиках волн высших типов крестообразного ДВ появляются точки перегиба.
6. Показано, что при расчёте дисперсионных характеристик основной волны круглого градиентного ОДВ спектральный метод обладает бóльшим быстродействием по сравнению с МЧО. Однако, в случае необходимости учёта материальной дисперсии при расчёте круглых градиентных световодов, МЧО обладает большим быстродействием по сравнению со спектральным методом.
7. Показано, что в случае учёта материальной дисперсии спектральный метод обеспечивает высокую скорость вычислений при расчёте дисперсионных характеристик ОДВ, в поперечном сечении которых можно выделить области с фиксированной концентрацией легирующих примесей.
8. Спектральным методом произведён расчёт дисперсионных характеристик основной волны трёхслойного круглого ОДВ с учётом материальной дисперсии.
9. В результате решения задачи синтеза определены параметры световодов, при которых коэффициент дисперсии обращается в нуль на заданной длине волны в области прозрачности кварцевого стекла.
10. Уточнено понятие самосогласованности задачи об излучении. Сформулирована самосогласованная задачи об излучении с плоской апертуры.
11. Показано, что самосогласованная задачи об излучении приводит к однородным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода, то есть является задачей на собственные функции и собственные значения.
12. Рассмотрено применение спектрального метода для расчёта спектра собственных функций внешней однородной краевой задачи. Показана принципиальная возможность построения базиса для решения внешней неоднородной краевой задачи с учётом обратного влияния на источник поля излучения.
13. Получена система интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно функции источника, формируемой на базе краевой задачи о собственных волнах круглого открытого ДВ.

14. Решены задачи синтеза функций источников, создающих симметричное или несимметричное поля излучения заданного вида.

15. Показана устойчивость решения задачи синтеза функции источника по отношению к расположению узлов коллокации на излучающей апертуре.

## **ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **В изданиях, рекомендованных ВАК:**

1. Малахов, В.А. Расчет коэффициента дисперсии волоконного световода на основе результатов измерения профиля показателя преломления заготовки / В.А. Малахов, Г.С. Малышев, А.С. Раевский // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. - 2011. - Т. 14. - вып. 2. - С. 58 – 64.

2. Малышев, Г.С. О прохождении фрактального импульса в зашумленном волоконно-оптическом канале / Г.С. Малышев, А.С. Раевский // Письма в ЖТФ. – 2013. - Т. 39. - вып. 17. - С. 71 – 79.

3. Малышев, Г.С. Прохождение фрактального импульса в зашумлённом волоконно-оптическом канале с дисперсией / Г.С. Малышев, А.С. Раевский // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. - 2013. - Т. 16. - вып. 1. - С. 40 – 46.

4. Малышев, Г.С. Самосогласованная задача об излучении из круглого отверстия в бесконечном идеально проводящем экране / Г.С. Малышев, Н.А. Новосёлова, С.Б. Раевский, А.Ю. Седаков // Антенны. - 2015. - вып. 3 (214). - С. 3 – 9.

5. Малышев, Г.С. Два метода расчёта характеристик полоскового диэлектрического волновода / Г.С. Малышев, А.Ю. Седаков, А.А. Титаренко // Антенны. – 2015. – вып. 6. - С. 63-68.

6. Малышев, Г.С. О сходимости интегральных представлений в самосогласованной задаче об излучении / Г.С. Малышев, Н.А. Новосёлова, С.Б. Раевский, А.Ю. Седаков // Антенны. - 2016. - вып. 1. - С. 121 – 128.

7. Малышев, Г.С. Задача синтеза источника, создающего заданное поле излучения / Г.С. Малышев, Н.А. Новосёлова, С.Б. Раевский, А.Ю. Седаков // Антенны. - 2016. - вып. 3. - С. 67 – 72.

8. Малышев, Г.С. Спектральный метод в самосогласованной задаче об излучении / Г.С. Малышев, А.С. Раевский, С.Б. Раевский, А.А. Титаренко // Антенны. – 2016. – вып. 4. - С. 3 – 12.

### **Другие публикации по теме работы:**

1. Малышев, Г.С. Анализ и синтез волоконного световода по заданному профилю показателя преломления / Г.С. Малышев, А.Ю. Порошенков, А.С. Раевский // Прикладная электродинамика. Фотоника. Живые системы - 2013: Тезисы докладов Международной научно-технической конференции. – Казань: КНИТУ-КАИ, 2013.

2. Малахов, В.А. О возможности применения программных методов в процессе изготовления волоконных световодов / В.А. Малахов, Г.С. Малышев, А.С. Раевский // Фотон-экспресс. – 2013. – вып. 6. – С. 227 – 228.

3. Малышев, Г.С. Метод расчета прямоугольных закрытых волноводов с произвольным анизотропным заполнением / Г.С. Малышев, А.С. Раевский, С.Б. Раевский, А.А. Титаренко // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии: Тезисы докладов XXIII Международной научно-технической Крымской конференции. – Украина, Севастополь, 2013.

4. Malyshev G.S., Raevskii A.S., Raevskii S.B., Titarenko A.A. Universal method for calculating the open dielectric waveguides with arbitrary cross-section // Proceedings of SPIE V. 9156. 2014. P. 915607. doi: 10.1117/12.2052690.

5. Malakhov V.A., Malyshev G.S., Raevskii A.S. About the parametric synthesis of an optical fiber, using a dispersion characteristic // Proceedings of SPIE V. 9156. 2014. P. 91560G / doi: 10.1117/12.2054598.

#### **Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:**

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011611210 / Малахов В.А., Малышев Г.С., Раевский А.С. Программа расчёта характеристик распространения волн волоконных световодов произвольного профиля показателя преломления; заявитель и патентообладатель НГТУ №2011611210; заявл. 13.12.2010 г.; зарегистрир. 04.02.2011 г.

2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012611372 / Малахов В.А., Малышев Г.С., Раевский А.С. Программа поиска комплексных корней дисперсионных уравнений многослойных волоконных световодов; заявитель и патентообладатель НГТУ №2012611372; заявл. 07.12.2011 г.; зарегистрир. 03.02.2012 г.

### **ЛИТЕРАТУРА**

Л.1. Раевский, С.Б. Решение внешней краевой задачи о распространении электромагнитных волн в направляющей диэлектрической структуре произвольного поперечного сечения / С.Б. Раевский, А.А. Титаренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. - Т.49. - №12. - С.2201-2213.

Л.2. Клеев, А.И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов): частные методы / А.И. Клеев, А.Б. Маненков, А.Г. Рожнев // Радиотехника и электроника. - 1993. – Т.38. - №5. – С.769-788.

Л.3. Сотская, Л.И. Метод интегрального уравнения в теории слабонаправляющих неоднородных оптических волноводов / Л.И. Сотская, А.Б. Сотский // Журнал технической физики. – 2002. - Т.72. - №12. - С.1-8.

Л.4. Goell, J.E. A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides / J.E. Goell // Bell Syst. Tech. – 1969. – №48. – P.2133-2160.

Л.5. Schlosser, W. Partially filled waveguides and surface waveguides of rectangular cross-section / W. Schlosser, H.G. Unger // Academic Press. – 1966. – V.1. – P.319-329.

Л.6. Унгер, Х.Г. Планарные и волоконные оптические волноводы / Х.Г. Унгер. – М.: Мир, 1980. – 656 с.

Л.7. Раевский, С.Б. Решение внешней краевой задачи о распространении электромагнитных волн в направляющей диэлектрической структуре

произвольного поперечного сечения / С.Б. Раевский, А.А. Титаренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. - Т.49. - №12. - С.2201-2213.

Л.8. Неганов, В.А. Линейная макроскопическая электродинамика, Т.1 / В.А. Неганов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. – М.: Радио и связь, 2000. – 512 с.

Л.9. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Л.10. Беланов, А.С. Дисперсия в световодах со сложным профилем показателя преломления / А.С. Беланов, Е.М. Дианов, В.И. Кривенков // Доклады академии наук.–1999. - Т.364. - №1. - С.37-41.

Л.11. Агравал, Г. Нелинейная волоконная оптика / Г. Агравал. - М.: Мир, 1996. – 323 с.

Л.12. Раевский, А.С. Самосогласованность краевых задач теории излучения / А.С. Раевский, С.Б. Раевский // Антенны. – 2014. – вып.2. - №201. - С.3 – 6.

Л.13. Неганов, В.А. Электродинамика и распространение радиоволн / В.А. Неганов, О.В. Осипов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой. -М.:Радиотехника, 2007.–743с.

Л.14. Алексидзе, М.А. Фундаментальные функции в приближённых решениях граничных задач / М.А. Алексидзе. - М.: Наука, 1991. - 352 с.

Подписано в печать . . . .16. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Уч.-изд. л.1,0. Тираж 100 экз. Заказ . . . .

---

Нижегородский государственный технический университет им.Р.Е.Алексеева  
Типография НГТУ. 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.