

**ДИДЕНКУЛОВ Олег Игоревич**

**ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ДЛИННЫХ ВОЛН В  
НАКЛОННЫХ КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2016

Работа выполнена на кафедре Прикладной математики Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Пелиновский Ефим Наумович**

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор  
**Кантаржи Исмаил Григорьевич**,  
и.о. зав. кафедрой гидравлики и  
гидротехнического строительства,  
Национальный исследовательский  
Московский государственный строительный  
университет

кандидат физико-математических наук  
**Кайстренко Виктор Михайлович**,  
ведущий научный сотрудник,  
Институт морской геологии и геофизики  
Дальневосточного отделения  
Российской академии наук

Ведущая организация: ФГБУН Институт океанологии  
им. П.П. Ширшова Российской академии наук

Защита состоится «02» декабря 2016 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.165.10 при Нижегородском государственном техническом университете им. Р.Е. Алексеева по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, корп. 1, ауд. 1315.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева.

Автореферат разослан «26» октября 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
д.ф.-м.н., профессор



Л.Ю. Катаева

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы диссертации

Определение характеристик наката морских волн на берег представляет собой важную практическую задачу. Эти характеристики в конечном итоге определяют зоны затопления и воздействие на береговые сооружения под воздействием длинных волн, таких как цунами, штормовые нагоны, волны-убийцы. Исследованию процесса наката волн на берег посвящено много работ. Наиболее полно в теории с помощью методов механики сплошных сред исследован случай длинных необрушенных волн, накатывающихся на плоский откос. В пионерской работе Кэрриера и Гринспана [1] было получено аналитическое решение нелинейных уравнений мелкой воды для линейно-изменяющегося профиля дна. Этот подход в дальнейшем получил развитие в серии работ различных авторов (Пелиновский, Мазова, Доценко, Кайстренко, Шерменева, Доброхотов, Kanoğlu, Pedersen, Synolakis, Tinti, Yeh и др.). В этих работах был рассмотрен накат одиночных волн различной формы, а также периодических волн. В результате были получены формулы для оценки максимальной высоты наката волн на берег и максимальной скорости подвижного уреза для конкретных типов падающей волны. Численное моделирование наката длинных волн на берег описано в книгах [2,3] и в серии последующих работ многих авторов. Аналитическая теория наката волн на плоский откос используется для создания быстрых «сквозных» методов численного расчета волн цунами от открытого океана до выхода на берег [4,5]. Другое важное приложение этой теории связано с разработкой схем цунамирайонирования Дальнего Востока России [6]. Наконец, отметим, что она применяется также для объяснения наблюдаемых кратковременных неожиданно возникающих аномально больших заплесков – береговых «волн-убийц» [7].

Известно, что характеристики наката волн в бухтах существенно отличаются от таковых на плоском откосе. Так во время известного сильно цунами 2009 г. на Самоа и Японского цунами 2011 г. цунами распространялось в бухтах U-образной формы, и наблюдаемая высота наката волн в этих бухтах существенно превысила оценки, сделанные по формулам для плоского откоса. Например, при цунами на Самоа максимальная высота наката отличалась от рассчитанной для плоского откоса почти на 2 метра [8]. В то же время в работе [9] показано, что оценки, сделанные с учетом поперечного сечения бухты Паго-Паго, находятся в хорошем совпадении с наблюдениями цунами 2009 г. на Самоа. Канальная теория распространения волн использовалась также в статье [10] для расчетов прохождения цунами через пролив Босфор, разделяющий Черное и Мраморное моря. Отсюда следует необходимость отдельного рассмотрения динамики цунами в таких бухтах. Объединение этих эффектов (геометрической фокусировки внутри

бухты и усиление вблизи берега) может привести к образованию аномально высокого заплеска волны на берег.

Второй важный момент, который в должном объеме не рассматривался ранее, это накат волны отрицательной полярности на берег. Во всех перечисленных работах основное внимание, как правило, уделяется накату одиночных волн положительной полярности (гребней), полагая, что именно они и приводят к большим заплескам волн на берег. Однако, как было показано еще в [11,12], наличие волны отрицательной полярности (впадины) перед основным гребнем может привести к увеличению высоты наката волн на плоский откос - так называемый "эффект N-волны". Эти выводы при прочих равных условиях остаются справедливыми как для волн малой амплитуды, когда справедлива линейная теория, так и для волн большой амплитуды, если последние не обрушаются.

Между тем, нелинейные эффекты проявляются по-разному для волн различной полярности, что продемонстрировано в [13] на примере трансформации волны в канале постоянной глубины в рамках нелинейной теории мелкой воды. Поскольку глубина воды под впадиной уменьшается, то нелинейные эффекты, приводящие к увеличению крутизны волны, проявляются быстрее, чем в случае импульса положительной полярности (гребня). Это должно приводить к разнице в форме волны подходящей к откосу, а не только в ее полярности, и волна отрицательной полярности должна иметь более крутой склон. Накат волн с крутым фронтом (первоначально синусоидальных) на плоский откос изучался в [14], где было показано, что высота наката существенно возрастает с ростом крутизны волны, в то время как дальность отхода волны от берега практически от нее не зависит. Очевидно, что в какой-то мере подобный эффект должен проявляться и при накате волн только одной полярности, если канал является составным, то есть состоит из двух частей, одна из которых наклонена, а ось другой - горизонтальна.

Для приложений также необходимо рассмотреть распространение нескольких семейств колоколообразных волн в бухтах различной формы и исследовать влияние формы сечения бухты на характеристики наката волн цунами. Это позволило бы проводить экспресс-оценки размеров затопляемой зоны в условиях дефицита информации о параметрах волны, подходящей к берегу, и характеристик донного рельефа.

Учитывая, что характеристики наката длинных волн в бухтах имеют решающее значение при расчете береговых укреплений, разработке мероприятий по снижению возможного ущерба от стихийных бедствий, исследование процессов наката длинных волн в каналах является актуальным и практически значимым.

## **Цели диссертационной работы**

Основная цель диссертационной работы – изучение наката длинных волн в наклонных каналах различного поперечного сечения в рамках нелинейной теории мелкой воды. Детально будут исследованы характеристики наката волн в каналах прямоугольного, параболического и треугольного сечений.

## **Научная новизна результатов работы**

Научная новизна диссертационной работы определяется полученными оригинальными результатами:

1. Показаны отличия в накате волн разной полярности в канале прямоугольного сечения, обусловленные нелинейными эффектами. Получено, что волна отрицательной полярности отличается более крутым фронтом на урезе и приводит к большей скорости движения уреза, чем волна положительной полярности.
2. Показано, что симметрия в накате волн различных полярностей в канале произвольного сечения наиболее сильно нарушается, если волна подходит к откосу нелинейно деформированной.
3. Получены параметризованные формулы для экстремальных характеристик наката волн в каналах различного поперечного сечения. Разбросы в коэффициентах этих формул в зависимости от формы подходящей одиночной волны не превышают 15%.
4. Подтверждаются данные наблюдений о том, что экстремальные характеристики наката в узких каналах больше, чем в широких. Глубина осушения дна может превышать высоту наката в узких каналах, даже если подходящая волна имеет только положительную полярность (в широких каналах выполняется противоположное утверждение).

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Отличия в характеристиках наката одиночных волн различной полярности в «составном» канале любого сечения.
2. Значительное увеличение высоты наката нелинейно деформированного импульса по сравнению с накатом симметричного импульса в канале любого сечения.
3. Параметризованные формулы экстремальных характеристик наката волн на берег в параболическом канале, не зависящие от формы подходящей волны.
4. Количественная оценка влияния формы поперечного сечения канала на характеристики наката волн на берег.

## **Практическая значимость результатов работы**

Полученные результаты по исследованию характеристик наката длинных волн в наклонных каналах произвольного сечения могут быть использованы для оценок последствий цунами и других морских природных катастроф в бухтах. Экспресс-оценки максимальных характеристик наката необходимы для своевременного принятия решения об эвакуации населения прибрежной полосы.

Основные научные результаты по теме диссертации получены в рамках реализации ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (соглашение № 14.574.21.0089 (уникальный идентификатор соглашения – RFMEFI57414X0089).

## **Апробация работы**

Основные результаты диссертации представлялись на следующих международных и всероссийских конференциях: Генеральной Ассамблее Европейского геофизического союза (Вена, Австрия, 2015–2016); 12th Int. Conference on the Mediterranean Coastal Environment (Варна, Болгария, 2015); IUTAM Symposium on Complexity of Nonlinear Waves, 2014 (Таллин, Эстония, 2014); XXII международной молодежной научно-технической конференции «Будущее технической науки» (Нижний Новгород, 2014); XXII Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2016 (Нижний Новгород, 2016); 24-й Всероссийской научно-методической конференции по графическим информационным технологиям и системам «КОГРАФ-2014» (Нижний Новгород, 2014). Они докладывались также на семинарах НИЛ «Моделирования природных и техногенных катастроф» кафедры «Прикладная математика» Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева.

Результаты, представленные в настоящей диссертации, были отмечены дипломом первой степени 24-й Всероссийской научно-практической конференции по графическим информационным системам и технологиям «КОГРАФ-2014» (Нижний Новгород, 2014), а также дипломом II степени XIII Международной молодежной научно-технической конференции «Будущее технической науки» (Нижний Новгород, 2014).

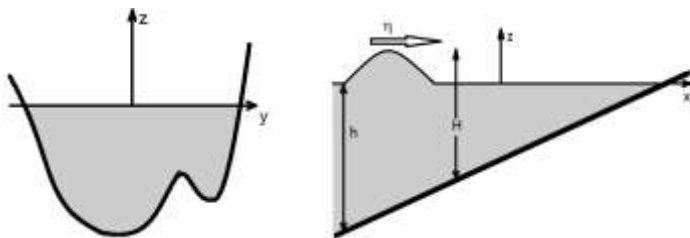
## **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации – 113 страниц, включая 32 рисунка и 1 таблицу.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы ее цели, научная новизна и основные положения, выносимые на защиту, практическая значимость результатов работы, апробация, список публикаций по теме диссертации.

**Глава 1** посвящена описанию аналитического метода решения нелинейных уравнений мелкой воды на границе «вода-суша», основанного на преобразованиях типа Карриера – Гринспана (годографа). В параграфе 1.2 излагается классическая теория наката длинных волн на плоский откос на основе преобразования Карриера-Гринспана [1]. В параграфе 1.3 изложено обобщение данного подхода для волн в линейно-наклонных каналах произвольного сечения [15]. Геометрия канала показана на рис. 1. Форма канала может быть произвольной.



**Рис. 1.** Поперечное (слева) и продольное (справа) сечения бухты

Если канал достаточно узкий, а длина волны велика, то для осредненного течения по поперечному сечению канала справедливы одномерные нелинейные уравнения мелкой воды

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uS) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g \frac{dh}{dx} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $u(x,t)$  – скорость потока, усредненного по поперечному сечению бухты,  $H(x,t) = \eta(x,t) + h(x)$  – полная глубина канала вдоль оси  $x$ ,  $h(x)$  – невозмущенная глубина вдоль оси  $x$ ,  $\eta(x,t)$  – смещение водной поверхности,  $S(H)$  или  $S(x)$  – переменная площадь поперечного сечения бухты и  $g$  – ускорение свободного падения.

Как показано в [15], нелинейные уравнения (1) с помощью обобщенного преобразования Карриера-Гринспана сводятся к линейному волновому уравнению с переменным коэффициентом на полуоси:

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} \right) - W(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0, \quad W(\sigma) = \frac{2 - dF/d\sigma}{F(\sigma)}. \quad (2)$$

Все физические переменные (скорость потока  $u$ , полная глубина на оси бухты  $H$ , время  $t$  и координата  $x$ ) находятся явным образом через волновую функцию  $\Phi(\sigma, \lambda)$ :

$$t = \frac{\lambda - u}{g\alpha}, \quad u = \frac{1}{F(\sigma)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad 2g\alpha x = -\int_0^\sigma F(\sigma') d\sigma' + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2, \quad (3)$$

$$H(x, t) = H(\sigma) + h(x) - \frac{1}{2g} \int_0^\sigma F(\sigma') d\sigma' + \frac{1}{2g} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{u^2}{2g},$$

где  $F(\sigma) = 2\sqrt{gS \frac{dH}{dS}}$ , а  $H(\sigma)$  находится из  $\sigma = \int_0^H \sqrt{\frac{g}{S} \frac{dS}{dH'}} dH'$ .

Форма канала существенно меняет вид линейного волнового уравнения (2) и трансформационные связи. Так, для плоского откоса уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0, \quad (4)$$

а для квази-параболического ( $z \sim |y|^m$ ):

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} \right) - \frac{m+2}{m\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0. \quad (5)$$

Параграф 1.4 посвящен описанию частного случая наклонного канала квази-параболического сечения. Параграф 1.5 посвящён сравнению решений линейной и нелинейной задач для зоны наката в рамках описанной теории. Демонстрируется сходство результатов, так что экстремальные характеристики наката волн на берег могут быть получены в рамках линейной теории. Эта особенность значительно расширяет возможности применения линейной теории (более простой для получения аналитических выражений) в задачах оперативного вычисления максимальных величин заплеска волн на берег, в частности, такие задачи важны в проблеме цунами. Кроме того, получаются сравнительно простые выражения зависимости положения подвижного уреза от времени (пограничной точки между водой и сушей по оси  $x$ ), выражения для скорости движения уреза (Лагранжевой скорости)  $u(t)$  и вертикального смещения уровня воды на побережье  $r(t)$ . Из линейной теории мелкой воды аналитически находятся вертикальное смещение уровня воды  $R(t)$  в точке  $x = 0$  (неподвижный урез) и скорость течения на неподвижном урезе  $U(t)$ , а затем можно найти уже «нелинейные» характеристики подвижного уреза:

$$u(t) = U \left( t + \frac{u}{g\alpha} \right), \quad r(t) = R \left( t + \frac{u}{g\alpha} \right) - \frac{u^2}{2g}. \quad (6)$$



Уравнения (6) явно демонстрируют нелинейную деформацию волнового профиля, схожую с нелинейной трансформацией волны Римана. Экстремальные значения (максимумы и минимумы) «линейных» и «нелинейных» функций одинаковы. Эти формулы не зависят от формы поперечного сечения канала (бухты) и верны для бухт произвольного поперечного сечения.

Из-за нелинейной трансформации функции  $u(t)$  в (6) она остается однозначной только в случае

$$Br = \frac{\max(dU/dt)}{g\alpha} \leq 1. \quad (7)$$

что легко получить простым дифференцированием (6) по времени. С математической точки зрения условие  $Br = 1$  соответствует так называемой градиентной катастрофе в гиперболических уравнениях (скорость подвижного уреза меняет мгновенно свое значение). Поэтому параметр  $Br$  называется параметром обрушения. С физической точки зрения это соответствует обрушению волны. Подчеркнем, что критерий обрушения содержит только решение линейной задачи.

Обобщенное преобразование Карриера-Гринспана, описанное в первой главе, используется для решения всех задач диссертации, изложенных ниже.

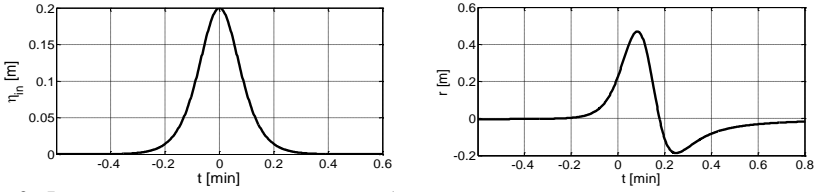
**Глава 2** посвящена изучению наката длинных одиночных волн различной полярности в наклонном канале прямоугольного сечения.

В параграфе 2.2 исследуется накат длинных одиночных импульсов положительной полярности на «составной» откос. Геометрия задачи соответствует параметрам Большого волнового канала Ганноверского университета Германии. Канал имеет прямоугольное сечение, длина прямого участка канала 251 м, глубина 3.5 м, и он заканчивается откосом 1:6.

Падающая волна вдали от откоса в фиксированной точке  $x_0$  имеет солитоноподобную форму положительной полярности (гребень):

$$\eta_m(t) = A \cosh^{-2}(t/T), \quad (8)$$

где  $A = 0.2$  м - высота начальной волны, и  $T = 6$  с - ее характерный полупериод (Рис. 2 слева). Зависимость вертикального смещения подвижного уреза от времени показана на рис. 2 (справа). Этот результат получен в рамках нелинейной теории мелкой воды и  $r(t)$  является характеристикой, наблюдаемой нами в экспериментах.

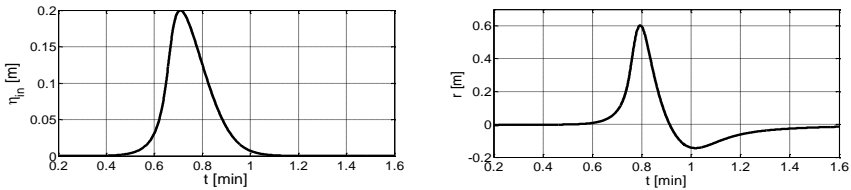


**Рис. 2.** Форма начального солитоноподобного импульса положительной полярности (слева) и колебания подвижного уреза (справа)

Далее рассмотрена задача, когда волна перед тем, как подойти к откосу, распространяется в бассейне постоянной глубины на расстояние  $X$ , что типично для многих экспериментальных исследований. Форма начальной волны идентична исходной в предыдущей задаче. В этом случае сначала происходит хорошо известная нелинейная трансформация длинной волны, описываемая так называемой Римановой волной [13]:

$$\eta(x, t) = \eta_m \left( t - \frac{x - X - L}{V(\eta)} \right), \quad V(\eta) = 3\sqrt{g(h + \eta)} - 2\sqrt{gh}, \quad (9)$$

Рассчитанная таким образом нелинейно деформированная волна (рис. 3 слева) выбрана в качестве начального (входного) возмущения для описания процесса наката волны на откос. Колебания подвижного уреза, вызванные накатом нелинейно деформированного импульса, показаны на рис. 3 (справа).



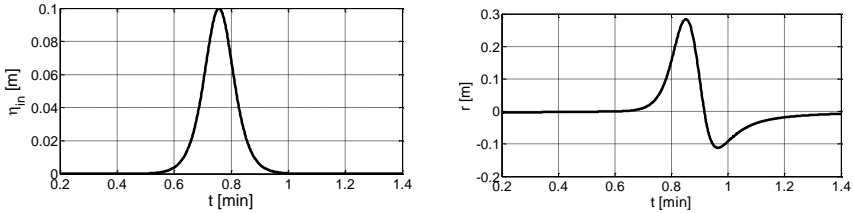
**Рис. 3.** Форма волны нелинейно деформированного импульса положительной полярности на кромке откоса (слева) и колебания подвижного уреза (справа)

Если начальная волна имеет относительно малую амплитуду (по сравнению с глубиной) и длину, то эффекты дисперсии становятся существенными, приводя к разбиению начального импульса на солитоны или формированию ундулярного бора на теле очень длинной волны. Этот процесс хорошо изучен в рамках уравнения Кортевега - де Вриза [16], справедливого для волн в бассейне постоянной глубины.

Форма солитона имеет вид:

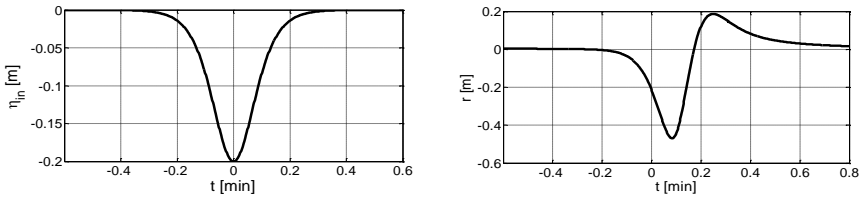
$$\eta_m(t) = A \cosh^{-2} \left( \sqrt{\frac{3Ag}{4h^2}} t \right). \quad (10)$$

При распространении солитона малой амплитуды в бассейне составной геометрии ситуация сводится к задаче о накате солитона на откос (рис. 4).



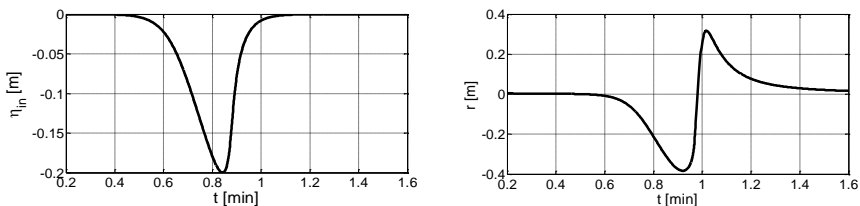
**Рис. 4.** Форма солитона на кромке откоса (слева) и колебания подвижного уреза при накате солитона на плоский откос (справа)

Параграф 2.3 посвящён изучению наката длинных волн отрицательной полярности (рис. 5 слева). В этом случае изначально отрицательный импульс с  $A = 0.2$  м приводит к отходу воды от берега на глубину 0.47 м, за которым следует подъем воды на высоту 0.19 м (рис. 5 справа). Параметр обрушения при этом чуть больше, чем в случае наката положительного импульса, но по-прежнему мал:  $Br = 0.16$ . Отличие параметра обрушения при накате положительного и отрицательного импульсов объясняется тем, что нелинейные эффекты, которые, в частности, выражаются в крутизне волнового фронта, всегда проявляются сильнее во впадине волны, нежели на ее горбе [13, 17-18].



**Рис. 5.** Форма начального солитоноподобного импульса отрицательной полярности (слева) и колебания подвижного уреза (справа) при накате на плоский откос

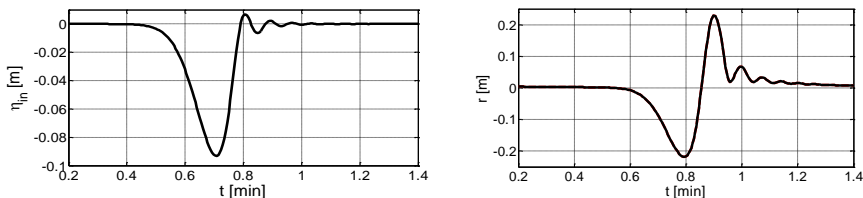
Далее рассмотрено распространение и накат солитоноподобного импульса отрицательной полярности вдоль составной геометрии. Нелинейная деформация такого импульса в бассейне постоянной глубины проходит аналогично рис. 3 (слева) за исключением того, что круглым теперь становится не передний, а задний склон волны (рис. 6. слева). Последующий накат такого импульса на плоский откос показан на рис. 6 (справа). Видно, что, как и при накате симметричного солитоноподобного импульса отрицательной полярности (рис. 5 справа), колебания уреза представляют собой знакопеременное смещение и сначала вода отходит от берега, а потом накатывается на него. Колебания наката значительно смещены в сторону положительных значений.



**Рис. 6.** Форма волны нелинейно деформированного импульса отрицательной полярности на кромке откоса (слева) и колебания подвижного уреза при накате на плоский откос (справа)

Важно подчеркнуть, что хотя начальная волна представляла собой только впадину, уровень подъема воды на побережье превысил амплитуду волны. Таким образом, при накате нелинейно деформированного импульса отрицательной полярности можно получить колебания уреза с близкими по величине значениями положительной и отрицательной амплитуды, что существенно меняет сложившиеся взгляды на накат волн отрицательной полярности. Этот результат является принципиальным и новым.

Учет дисперсии кардинально влияет на трансформацию и накат волны отрицательной полярности. Начальный импульс отрицательной полярности (впадина) в бассейне постоянной глубины на больших расстояниях трансформируется в волновой пакет, напоминающий волну Эйри [16]. На рис. 7 показана рассчитанная форма волны отрицательной полярности высотой 0.1 м; начальная волна принималась в форме (10) с изменением знака.



**Рис. 7.** Форма волны на кромке откоса при накате волны отрицательной полярности на составной берег (слева) и колебания подвижного уреза (справа)

Видно, что начальный импульс немного потерял в амплитуде (0.093 м) при распространении волны на ровном участке, поскольку его энергия излучилась в дисперсионный хвост. Отметим, что его задний склон заметно укрутился, как и ранее для более длинного импульса (рис. 6 слева), но теперь за ним следуют небольшие осцилляции. Важно отметить, что увеличение крутизны заднего склона импульса на кромке откоса сильно повлияло на экстремальные характеристики наката. Глубина отката и высота наката равны соответственно 0.22 м и 0.23 м. Параметр обрушения для отрицательного

импульса, как и ранее, выше, чем для положительного, и равен  $Br = 0.28$ , что говорит о том, что волна все еще далека от обрушения.

**Глава 3** посвящена изучению наката длинных волн в наклонном канале параболического сечения. В параграфе 3.2 рассматривается накат различных импульсов в бухте параболического сечения, а также произведена параметризация максимальных характеристик наката. В качестве падающих на берег волн было рассмотрено несколько семейств колоколообразных импульсов различной формы: солитоноподобной, синусоидальной (в течение полупериода), а также лоренцевой формы:

$$\eta_{in}(t) = A \operatorname{sech}^n(t/T), \quad \eta_{in}(t) = A \cos^n\left(\frac{\pi t}{T}\right), \quad \eta_{in}(t) = \frac{A}{\left(1 + (t/T)^2\right)^n}. \quad (11)$$

Для анализа возможности параметризации характеристик наката этих импульсов были введены численные коэффициенты  $\mu_R$ ,  $\mu_{U\pm}$  и  $\mu_{Br}$ , зависящие от формы волны в формулы для экстремальных характеристик наката

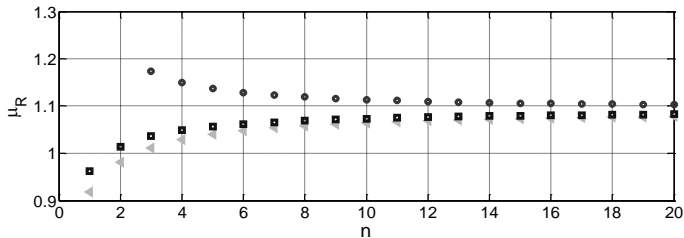
$$R_{\max} = \mu_R R_0, \quad R_0 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{AL}{\sqrt{gh_0 T_{eff}}}, \quad (12)$$

$$U_{\max} = \mu_{U+} U_0, \quad U_{\min} = \mu_{U-} U_0, \quad U_0 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{AL}{\alpha \sqrt{gh_0 T_{eff}^2}}, \quad (13)$$

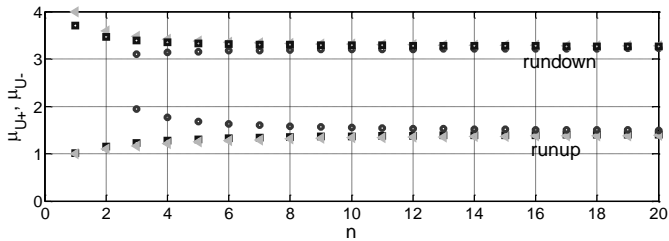
$$Br = \mu_{Br} Br_0, \quad Br_0 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{AL}{g \alpha^2 \sqrt{gh_0 T_{eff}^3}}, \quad (14)$$

где  $T_{eff}$  – это эффективная длительность импульса, определяемая по уровню 2/3 от максимальной высоты падающего импульса, что соответствует понятию "значительной волны" в океанографии,  $R_{\max}$  – максимальная высота наката,  $U_{\max}$  и  $U_{\min}$  – максимальные скорости наката и отката соответственно.

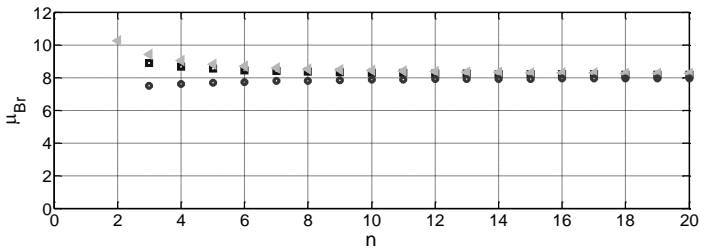
Результаты расчета этих параметров для соответствующих семейств колоколообразных импульсов приведены на последующих рис. 8-10.



**Рис. 8.** Параметр формы для максимальной высоты наката: кружками показаны значения для импульсов синусоидальной формы, треугольниками - для импульсов лоренцеобразной формы, квадратами - для импульсов солитоноподобной формы



**Рис. 9.** Параметр формы для максимальных скоростей наката и отката: кружками - значения для импульсов синусоидальной формы, треугольниками - для импульсов лоренцеобразной формы, квадратами - для импульсов солитоноподобной формы



**Рис. 10.** Параметр формы для параметра обрушения  $B_r$ : кружками - значения для импульсов синусоидальной формы, треугольниками - для импульсов лоренцеобразной формы, квадратами - для импульсов солитоноподобной формы

Из рис. 8 видно, что параметр  $\mu_R$  для максимальной высоты наката волн на берег с увеличением  $n$  стремится к общему для всех типов импульсов значению  $\approx 1.1$ , и максимальный разброс не превышает 15%. При этом максимальные отличия наблюдаются при малых  $n$ , когда различие в форме максимально. Параметры  $\mu_{U\pm}$  для максимальных скоростей наката и отката волн тоже стремятся к одним и тем же значениям для всех типов импульсов, которые равны  $\approx 1.4$  и  $\approx 3.2$  соответственно, рис. 9. И, наконец,  $\mu_{Br}$  для параметра обрушения, как и ожидалось, также выходит на постоянное значение  $\approx 8.1$  с максимальным разбросом 24%, рис. 10.

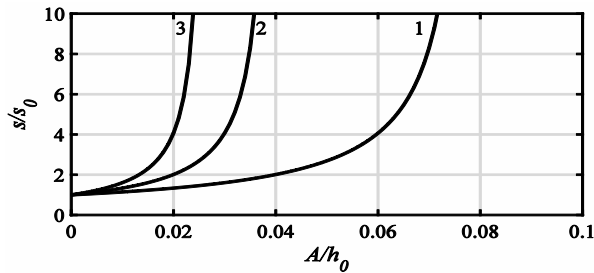
В параграфе 3.3 рассматривается накат нелинейно деформированных импульсов в бухте параболического сечения. Наличие сшивки линейного склона и участка постоянной глубины вдоль главной оси бухты существенно усложняет задачу, поэтому мы здесь ограничимся асимптотическим решением. Для этого, во-первых, будем считать, что сшивка производится в «линейной» зоне, то есть далеко от берега, где волну можно считать линейной. Во-вторых, будем считать угол линейного откоса вдоль главной оси бухты достаточно малым, чтобы можно было пренебречь отражением от излома. Аналогично тому, как это было сделано во второй главе для канала прямоугольной формы, разделим процесс эволюции волн в бухте

параболического сечения на два этапа: *этап 1* - нелинейная деформация волн в параболическом канале постоянной глубины ( $x < -L$ ) и *этап 2* - накат нелинейно деформированных волн на берег бухты параболического сечения ( $x > -L$ ).

Движение волны на этапе 1 описывается римановой волной (9). В качестве примера рассмотрим трансформацию монохроматической волны. Максимальная крутизна фронта этой волны около откоса может быть выражена как

$$\frac{s_{\max}}{s_0} = \left( 1 - 4\pi \left( \frac{x_0 - L}{\lambda} \right) \frac{A}{h_0} \right)^{-1}. \quad (15)$$

Ее зависимость от параметра нелинейности волны  $A/h_0$  представлена на рис. 11 для различных значений параметра  $(x_0 - L)/\lambda$ . Сначала достаточно долго крутизна почти не меняется, но начиная с некоторого момента (как правило, в этот момент крутизна достигает значения  $s/s_0 = 2$ ), начинается интенсивный рост крутизны до бесконечности.

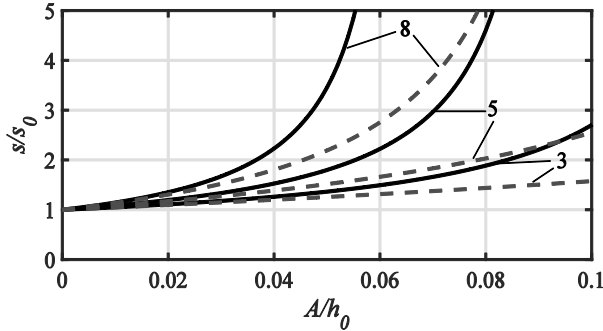


**Рис. 11.** Изменение максимальной крутизны переднего фронта синусоидальной волны при ее подходе к откосу

Рассмотрим теперь одиночную волну солитоноподобной формы положительной полярности. Зависимость ее крутизны от амплитуды выражается формулой (16) и представлена на рис. 12.

$$\frac{s_{\max}}{s_0} = \left[ 1 - \frac{8\sqrt{3}}{3} \left( \frac{x_0 - L}{\lambda} \right) \frac{A}{h_0} \left( \frac{1}{3 + 8A/h_0} \right) \right]^{-1}. \quad (16)$$

Видно, что крутизна ведет себя похожим образом на то, что наблюдалось для монохроматической волны, однако меняется более медленно (см. рис. 11).



**Рис. 12.** Изменение максимальной крутизны переднего фронта солитоноподобной волны положительной (штриховая линия) и отрицательной (сплошная линия) полярности при ее подходе к откосу; цифрами показаны значения параметра  $(x_0 - L)/\lambda$

Рассмотрим одиночную волну солитоноподобной формы отрицательной полярности. Относительная амплитуда отрицательной уединенной волны не может быть большой и превышать  $3/8$ , иначе волна опрокинется еще на входе в бухту. Изменение максимальной крутизны одиночной волны отрицательной полярности при ее распространении описывается

$$\frac{s_{\max}}{s_0} = \left[ 1 - \frac{8\sqrt{3}}{3} \left( \frac{x_0 - L}{\lambda} \right) \frac{A}{h_0} \left( \frac{1}{3 - 8A/h_0} \right) \right]^{-1}, \quad (17)$$

что также отображено на рис. 12. Изменения крутизны в случае одиночной волны отрицательной полярности происходят медленнее, чем в случае синусоидальной волны, но быстрее, чем в случае одиночной волны положительной полярности.

На *этапе 2* нелинейно деформированная Риманова волна накатывается на берег. Если сопряжение между участками дна достаточно гладкое (мал угол откоса), то отражением от кромки шельфа можно пренебречь, и считать Риманову волну падающей в задаче наката. Высота наката описывается формулой, зависящей от производной по времени от падающей на откос волны

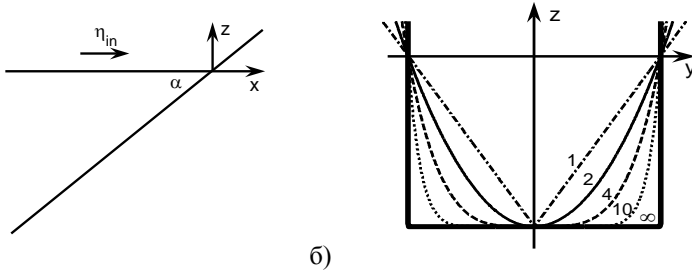
$$R_{\max} = R_0 \frac{s}{s_0}, \quad R_0 = 4\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{L}{\sqrt{gh_0}} \max \left( \frac{d\eta_0}{dt} \right). \quad (18)$$

Здесь  $R_0$  соответствует максимальной высоте наката начального (недеформированного) импульса. Таким образом, в отличие от случая плоского откоса (где  $R_{\max} \sim \sqrt{s}$ ), в бухте параболического сечения влияние асимметрии подходящей к берегу волны более значительно. Из формулы (18) следует, что максимальная высота наката волн на берегу полностью



определяется максимальной крутизной подходящей к склону волны, рассчитанной на *этапе 1*.

В **Главе 4** рассмотрено распространение нескольких семейств колоколообразных волн в бухтах различной формы и исследовано влияние формы сечения бухты на характеристики наката волн цунами. Рассмотрим бухту постоянного уклона, поперечное сечение которой меняется по степенному закону  $z \sim |y|^m$ . На Рис. 13 показана общая геометрия задачи и наиболее характерные формы поперечного сечения, соответствующие значениям  $m = 1, 2, 4, 10$  и  $\infty$ .



**Рис. 13.** Геометрия задачи: а) продольное сечение бухты и б) поперечные сечения бухты при  $m = 1$  (штрих-пунктирная линия), 2 (сплошная линия), 4 (штриховая линия), 10 (точечная линия) и  $\infty$  (жирная сплошная линия)

Подходящую к берегу волну  $\eta_{in}$  на некотором достаточно большом расстоянии  $L$  от берега можно представить интегралом Фурье

$$\eta_{in}(t, L) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega, L) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (19)$$

Здесь  $A(\omega)$  – комплексные амплитуды Фурье-гармоник. Формула для нахождения максимальной высоты наката принимает вид:

$$R_+ = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{m+2}{2m}} \max \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{m+2}{2m}} A(\omega) \exp \left[ i \left[ \omega(t - \tau) + \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{4} \right) \text{sgn}(\omega) \right] \right] d\omega \right\}. \quad (20)$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма-функция, а  $\tau$  – время добегаания волны до берега, которое в свою очередь зависит от формы бухты:

$$\tau = \sqrt{\frac{4L}{g\alpha} \left( \frac{m+1}{m} \right)}. \quad (21)$$

Аналогично может быть найдена и максимальная глубина отката волны  $R_-$  как минимум выражения в (20). Максимальная скорость наката волны на берег равна

$$U_+ = \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{m+2}{2m}} \max \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{\frac{3m+2}{2m}} A(\omega) \exp \left( i \left[ \omega(t-\tau) + \left( \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sgn}(\omega) + \frac{\pi}{2} \right] \right) d\omega \right\}. \quad (22)$$

Параметры формы для максимальных высот и скоростей наката и отката  $\mu_{R_{\pm}}$  и  $\mu_{U_{\pm}}$  определяются как:

$$R_{\pm} = \mu_{R_{\pm}} A \left( \frac{L}{\sqrt{gh_0 T_{eff}}} \right)^{\frac{m+2}{2m}}, \quad U_{\pm} = \mu_{U_{\pm}} \frac{A}{\alpha T_{eff}} \left( \frac{L}{\sqrt{gh_0 T_{eff}}} \right)^{\frac{m+2}{2m}}. \quad (23)$$

Заменяя параметры  $\mu_{R_{\pm}}$  и  $\mu_{U_{\pm}}$  их средними арифметическими значениями, получаем параметризованные формулы для характеристик наката (23), независящие от формы подходящей уединенной волны.

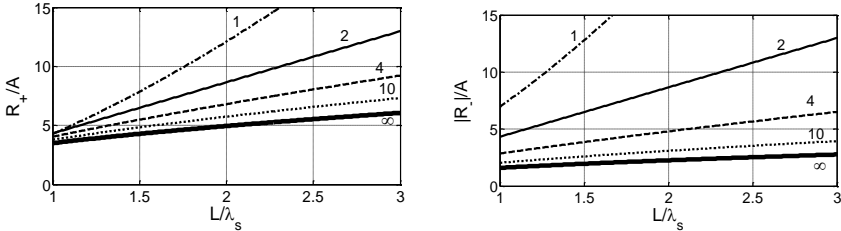
Как и в главе 3 использованы семейства колоколообразных гребней солитоноподобной, синусоидальной (в пределах полупериода) и лоренцевой формы. Полученные значения коэффициентов формы для каждого профиля представлены в таблице 1.

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 10$	$m \rightarrow \infty$
$\mu_{R_+}$	[5.63, 8.60]	[4.50, 5.75]	[3.90, 4.63]	[3.52, 4.03]	[3.27, 3.64]
$\mu_{R_-}$	[11.64, 12.18]	[4.50, 5.75]	[2.35, 3.60]	[1.47, 2.56]	[1.02, 1.97]
$\mu_{U_+}$	[21.42, 24.64]	[4.89, 9.54]	[4.12, 7.03]	[3.65, 5.82]	[3.35, 5.12]
$\mu_{U_-}$	[28.49, 43.91]	[15.17, 19.56]	[10.57, 12.28]	[8.32, 9.02]	[6.94, 7.26]

**Табл. 1.** Диапазон изменения коэффициентов формы  $\mu_{R_{\pm}}$  и  $\mu_{U_{\pm}}$  для наклонных бухт со степенным профилем поперечного сечения

Из табл. 1 видно, что при значениях  $m < 2$ ,  $R_-$  более чем на 60% превышает  $R_+$ . В бухте параболического сечения ( $m = 2$ ) максимальные значения высот наката и глубин отката совпадают. В бухтах с  $m > 2$ , высота наката все время превышает глубину отката, при этом их отношение (разброс) растет с увеличением  $m$ , достигая своего максимального значения при  $m \rightarrow \infty$ , когда максимальная высота наката более чем в 2 раза превышает глубину отката. Максимальные скорости отката всегда больше максимальный скорости наката, меняется только разброс между их величинами. Все это говорит о принципиальной разнице в волновых режимах между более узкими треугольными и более широкими параболическими бухтами. Степень в

выражениях (22) равна 1 для  $m = 2$ , меньше 1 для  $m > 2$ , и больше 1 для  $m < 2$ . Это говорит о существенной разнице в коэффициентах усиления волн в этих бухтах. Зависимость коэффициента усиления волн от отношения расстояния до берега  $L$  к длине подходящей к берегу волны  $\lambda_s$ , для бухт различной формы отражена на Рис. 14.



**Рис. 14.** Максимальная высота наката (слева) и отката (справа) волн на берег от отношения  $L$  к  $\lambda_s$  в бухтах различного сечения:  $m = 1$  (штрих-пунктирная линия), 2 (сплошная линия), 4 (штриховая линия), 10 (точечная линия) и  $\infty$  (жирная линия)

Видно, что чем уже бухта (чем меньше  $m$ ), тем больше волна в ней усиливается, поэтому наиболее опасными следует считать каналы треугольного сечения (каналы с  $m < 1$  вряд ли реализуются в естественных морских условиях). Скорость наката и отката волн в рамках нелинейной теории наката не обрушивающихся волн зависит от  $m$ :

$$U_{\pm} \sim AT_{eff} \frac{(3m+2)}{2m}. \quad (24)$$

В случае треугольного канала эта степень максимальна (по модулю) и равна  $(5/2)$ , при увеличении параметра  $m$  степень монотонно уменьшается, асимптотически приближаясь к значению  $(3/2)$  для плоского откоса. Таким образом, в более узких треугольных каналах происходит интенсификация волновых явлений, что выражается в аномальном усилении волн и их скоростей на берегу.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Показаны отличия в накате волн разной полярности в канале прямоугольного сечения, обусловленные нелинейными эффектами. Получено, что волна отрицательной полярности отличается более крутым фронтом на урзе и приводит к большей скорости движения уреза, чем волна положительной полярности.
2. Показано, что симметрия в накате волн различных полярностей в канале произвольного сечения наиболее сильно нарушается, если волна подходит к откосу нелинейно деформированной.

3. Получены параметризованные формулы для экстремальных характеристик наката волн в каналах различного поперечного сечения. Разбросы в коэффициентах этих формул в зависимости от формы подходящей одиночной волны не превышают 15%.
4. Подтверждаются данные наблюдений о том, что экстремальные характеристики наката в узких каналах больше, чем в широких. Глубина осушения дна может превышать высоту наката в узких каналах, даже если подходящая волна имеет только положительную полярность (в широких каналах выполняется противоположное утверждение).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] **Carrier G.F., and Greenspan H.P.** Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mech.*, 1958, V. 4, 97 - 109.
- [2] **Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами, Новосибирск: Наука, 1983, 175с.
- [3] **Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук А.Г., Симонов К.В.** Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. Новосибирск: Наука, 1988, 168с.
- [4] **Choi B.H., Kim K.O., Yuk J.H., Kaistrenko V., and Pelinovsky E.** Analytical rapid prediction of tsunami runup heights: application to 2010 Chilean Tsunami. *Ocean and Polar Research*, 2015, V. 37, №1, 1-9.
- [5] **Min B.I., Kaistrenko V.M., Pelinovsky E., and Choi B.H.** Rapid forecasting of tsunami runup using the shallow-water modeling of tsunami propagation in the East (Japan) Sea. *J Coastal Research*, 2011, V. SI 64, 1135-1139.
- [6] **Го Ч.Н., Кайстренко В.М., Пелиновский Е.Н., Симонов К.В.** Количественная оценка цунамиопасности Тихоокеанского побережья СССР. Тихоокеанский ежегодник. Владивосток, 1988, 9 - 17.
- [7] **Kharif Ch., Pelinovsky E., and Slunyaev A.** *Rogue Waves in the Ocean.* Springer, 2009, 216 p.
- [8] **Okal E.A., Fritz H.M., Synolakis C.E., Borrero J.C., Weiss R., Lynett P.J., Titov V.V., Foteinis S., Jaffe B.E., Liu P.L.-F., and Chan I.-Ch.** Field survey of the Samoa tsunami of 29 September 2009. *Seismolog. Res. Lett.* 2010, V. 81, № 4, 577–591.
- [9] **Didenkulova I.** Tsunami runup in narrow bays: the case of Samoa 2009 tsunami, *Nat. Hazards*, 2013, V. 65, № 3, 1629–1636.
- [10] **Базыкина А.Ю., Доценко С.Ф.** Применение каналовой модели для описания распространения одиночных волн типа цунами в канале переменного поперечного сечения. *Морской гидрофизический журнал*, 2015, № 1, 29-41.

- [11] **Голубцова Т.С., Мазова Р.Х.** Накат на берег волн знакопеременной формы. Колебания и волны в механике сплошной среды. Горький: ГПИ, 1989, 30-43.
- [12] **Tadepalli S., and Synolakis C.** The runup of N-waves. Proc. Roy. Soc. London, 1994, V. A445, 99 - 112.
- [13] **Диденкулова И.И., Заibo Н., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.** Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье. Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2006а, Т. 42, № 6, 839-842.
- [14] **Диденкулова И.И., Заibo Н., Куркин А.А., Левин Б.В., Пелиновский Е.Н., Соомере Т.** Накат нелинейно деформированных волн на берег, Доклады Академии Наук, 2006б, Т. 410, № 5, 676–678.
- [15] **Rybkin A., Pelinovsky E., and Didenkulova I.** Nonlinear wave run-up in bays of arbitrary cross-section: generalization of the Carrier-Greenspan approach J. Fluid Mech., 2014, V. 748, 416-432.
- [16] **Пелиновский Е.Н.** Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996, 176с.
- [17] **Пелиновский Е.Н., Родин А.А.** Трансформация сильно нелинейной поверхностной волны в мелководном бассейне. Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2012, Т. 48, № 3, 383–390.
- [18] **Zahibo N., Didenkulova I., Kurkin A., and Pelinovsky E.** Steepness and spectrum of nonlinear deformed shallow water wave. Ocean Eng., 2008, V. 35, № 1, 47–52.

## СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК:

- Д-1** Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н., **Диденкулов О.И.** Накат длинных уединенных волн различной полярности на плоский откос. Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2014, Т. 50, № 5, 604-611.
- Д-2** **Диденкулов О.И.**, Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н., Куркин А.А. Влияние формы поперечного сечения бухты на характеристики наката волн на берег. Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2015, Т. 51, № 6, 741-747.
- Д-3** **Диденкулов О.И.**, Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н. Накат нелинейно деформированных морских волн на берег бухты параболического сечения. Вестник МГУ, Серия: Физика. Астрономия, 2016, № 3, 84 - 89.
- Д-4** **Didenkulov O., Didenkulova I., and Pelinovsky E.** Parameterization of run-up characteristics for long bell-shaped solitary waves propagating in the bay of parabolic cross-section. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 2015, Vol. 64, № 3, 234 - 239.

**Д-5** Didenkulova I., **Didenkulov O.**, and Pelinovsky E. A note on the uncertainty in tsunami shape for estimation of its run-up heights. Journal of Ocean Engineering and Marine Energy (Springer), 2015, Vol. 1, № 2, 199-205.

**Д-6** Didenkulova I., Kurkin A., **Didenkulov O.**, Pelinovsky E., Rodin A., Giniyatullin A. Express estimates of the runup characteristics in bays. Proceedings of the Twelfth International Conference on the Mediterranean Coastal Environment, MEDCOAST 15, 06 - 10 October 2015, Varna, Bulgaria (ed. E. Özhan), MEDCOAST, Mediterranean Coastal Foundation, Dalyan, Mugla, Turkey, 2015, vol. 2, 813-824.

**в других изданиях:**

**Д-7 Диденкулов О.И.**, Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н. Параметризация характеристик наката одиночных волн в бухте параболического сечения. Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. Раздел: Механика жидкости, газа и плазмы, 2014, № 3 (105), 30-36.

**в учебном пособии:**

**Д-8** Пелиновский Е.Н., Диденкулова И.И., Куркин А.А., Родин А.А., **Диденкулов О.И.** Аналитическая теория наката морских волн на берег. Учебное пособие для специальности «Прикладная математика» и «Математическая физика». Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, 2015, 114 с. [ISBN 978-5-502-00716-0]

**в трудах конференций:**

**Д-9 Диденкулов О.И.**, Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н. Параметризация характеристик наката одиночных волн в бухте параболического сечения. Сборник материалов 24-ой Всероссийской научно-практической конференции по графическим информационным технологиям и системам «КОГРАФ-2014», Нижний Новгород, 16-17 апреля 2014 г., 170-175.

**а также в тезисах конференций:**

**Д-10 Диденкулов О.И.**, Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н. Накат различных импульсов колоколообразной формы на берег бухты параболического сечения. Сборник материалов XIII Международной молодежной научно-технической конференции “Будущее технической науки”, Нижний Новгород, 23 мая 2014 г., 478.

**Д-11** Пелиновский Е.Н., Родин А.А., **Диденкулов О.И.**, Диденкулова И.И. Аналитические решения и численное моделирование задачи

разрушения плотины в наклонных каналах. Сборник материалов XXII Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2016, Нижний Новгород, 22 апреля 2016 г., 436.

- Д-12** Родин А.А., **Диденкулов О.И.**, Сергеева А.В., Пелиновский Е.Н., Диденкулова И.И., Шрирам В., Вишну Р., Сундар В., Саннасирай С.А.. Экспериментальное исследование воздействия волн на прибрежные сооружения при экстремальных наводнениях. Сборник материалов XXII Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2016, Нижний Новгород, 22 апреля 2016 г., 421.
- Д-13 Didenkulov O.**, Didenkulova I., and Pelinovsky E. Parameterization of run-up characteristics of bell-shaped tsunami waves in a bay of parabolic cross-section. IUTAM symposium on Complexity of Nonlinear Waves, 8-12 September, Tallinn, Estonia, 2014, Book of Abstracts, 39-40.
- Д-14 Didenkulov O.**, Didenkulova I., and Pelinovsky E. A note on the uncertainty in tsunami shape for estimation of its run-up heights. Geophysical Research Abstracts, Vol. 17, 2015, EGU2015-1240.
- Д-15 Didenkulov O.**, Didenkulova I., and Pelinovsky E. Transformation and run-up of single and periodic waves in the bay of parabolic cross-section. Geophysical Research Abstracts, Vol. 17, 2015, EGU2015-1384.
- Д-16** Didenkulova I., Pelinovsky E., **Didenkulov O.**, and Rodin A. Run-up of long solitary waves of different polarities on a plane beach. Geophysical Research Abstracts, Vol. 17, 2015, EGU2015-1241.
- Д-17** Pelinovsky E., Didenkulova I., **Didenkulov O.**, and Rodin A. Analytical solutions and numerical modeling for a dam-break problem in inclined channels. Geophysical Research Abstracts, Vol. 18, 2016, EGU2016-7153.
- Д-18** Sriram V., Didenkulova I., Pelinovsky E., Rodin A., **Didenkulov O.**, Sergeeva A., Vishnu R.N., Sundar V., and Sannasiraj S.A. Experimental study of wave impact on the nearshore structures during extreme coastal floods. Geophysical Research Abstracts, Vol. 18, 2016, EGU2016-4240.

Диденкулов Олег Игоревич

**ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ДЛИННЫХ ВОЛН В  
НАКЛОННЫХ КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

А в т о р е ф е р а т

Подписано к печати 26.09.2016 г. Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Уч-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ №582.

Отпечатано в типографии НГТУ им. Р.Е. Алексева  
603950, г. Н. Новгород, ул. Минина, 24