

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ
РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР
ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ
ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»

На правах рукописи

Стручков Андрей Викторович

**ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТРЕХМЕРНОГО
ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ
ТЕЧЕНИЙ ПРИ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ
НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

Специальность 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
А.С. Козелков

Саров – Нижний Новгород, 2023

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Глава 1. Численные методы и алгоритмы повышения точности и устойчивости моделирования сверхзвуковых течений

1.1. Введение

1.2. Основные уравнения и способы дискретизации

1.3. Модификация метода расчета ограничителей потока

1.4. Модификация метода расчета градиентов

1.5. Исследование модификаций ограничителя потока и метода расчета градиентов для моделирования сверхзвуковых течений на неструктурированных сетках

1.6. Заключение

Глава 2. Методы и алгоритмы на сеточном уровне для повышения эффективности моделирования сверхзвуковых течений

2.1. Введение

2.2. Метод многосеточной начальной инициализации

2.3. Метод статической адаптации расчетной сетки под особенности течения

2.4. Моделирование сверхзвукового обтекания с использованием многосеточной инициализации и статической адаптации на произвольных сетках

2.5. Исследование ударно-волновой структуры потока при сверхзвуковом истечении из сопла

2.6. Заключение

Глава 3. Исследование ударно-волновой структуры течения при сверхзвуковом обтекании тела

3.1 Введение

3.2 Исследование формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом обтекании клина

3.3 Влияние дополнительных механических элементов на распределение аэродинамических характеристик в сверхзвуковом течении

3.4 Моделирование АДХ сверхзвукового летательного аппарата

3.5 Исследование ударно-волновой картины сверхзвукового летательного аппарата

3.6 Заключение

Заключение

Работы автора по теме диссертации

Список литературы

Введение

Диссертация посвящена исследованию ударно-волновой структуры течения при сверхзвуковом обтекании тел различной конфигурации на произвольной неструктурированной сетке, включая описание ударных волн при их отражении и взаимодействии с пограничным слоем, а также характеристики распределения газодинамических величин в зависимости от параметров течения. Для этого в рамках работы разработаны методы и алгоритмы повышения точности и эффективности трехмерного численного моделирования сверхзвуковых течений на неструктурированных сетках и их адаптация к решению фундаментальных и промышленно-ориентированных задач.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Численное моделирование, основанное на решении системы уравнений Навье-Стокса, получило широкое применение для описания течений в большом диапазоне чисел Маха. Одной из важных прикладных областей применения системы уравнений Навье-Стокса является решение задач сверхзвуковой и гиперзвуковой аэродинамики [Лунёв, 2007; Park, 1990; Anderson, 1988, 2005; Козелков и др., 2017(a); под редакцией М.А. Погосяна, 2020]. Такие задачи, например, возникают при расчете теплообмена космических аппаратов, движущихся в верхних слоях атмосферы, или полетов сверхзвуковых летательных аппаратов [Землянский и др., 2014; Тирский и др., 2011]. В этом случае экспериментальные исследования связаны со значительными техническими трудностями (как при проведении летных испытаний, так и стендовых экспериментов), поэтому главные аэродинамические характеристики исследуемого объекта целесообразно получать путем численного моделирования с применением вычислительных машин и инженерных кодов [Sun et al., 2003, 2004; Власов&Горшков, 2001; Josyula&Shang, 1993; Стручков и др., 2019; Kozelkov et al. 2022(б); под редакцией Погосяна, 2020; Савин и др. 2008].

С точки зрения численного моделирования задачи сверхзвуковой аэродинамики решаются с применением как явной, так и неявной разностных схем интегрирования. Неявные схемы интегрирования [Issa, 1985; Weiss 1997, 1999; Blazek, 2001; Jasak, 1996; Жалнин и др., 2012, 2014] гарантированно могут применяться для течений с характерным числом Маха, не превышающим 7-8. Задачи гиперзвуковой аэродинамики, для которых число Маха существенно больше 7-8, в настоящее время решаются преимущественно с

применением явных разностных схем [Jameson, 1981, Blazek, 2001; Cabuk, 1992; Jasak, 1996; Горобец&Козубская, 2007; Gorobets et al., 2009].

В то же время для расчета задач сверхзвуковой аэродинамики использование блочно-структурированных сеток пока еще остается ключевым [Саху&Дэнберг, 1987; Шенг&Шерр, 1987; Coakley, 1987; Шур и др, 2007; Гарбарук и др., 2016; Адамьян 2011; Garbaruk et al., 2006]. Однако такой тип расчетной сетки приемлем к решению задач с простыми геометрическими конфигурациями – плоской или осесимметричной геометрией (конус, цилиндр, сфера). В случае серийных расчетов сложных конструкций при рассмотрении практически-значимых задач применение блочно-структурированных сеток осложнено трудностью их построения [Козелков и др., 2017(a); Chase&Carrica, 2013; Uzun&Hussaini, 2012; Xia et al., 2010]. Это связано с необходимостью разбивать область на подобласти, строить в каждой из них блочную сетку, сопрягать в единую сетку сетки из каждой подобласти.

В случае расчета течений в областях со сложной геометрической конфигурацией наибольшее предпочтение получили неструктурированные расчетные сетки [Barth&Deconinck, 1999; Titarev et al., 2007, 2011; Abgrall, 1994; Delanaye&Liu, 1999; Deryugin et al., 2017; Wang, 2007; Li, 2014; Козелков А.С. и др., 2017(а,б); Абалкин и др., 2010; Абалкин&Козубская, 2013; Abalakin et al., 2006, 2010].

При таком подходе по заданным параметрам ячеек (минимальный и максимальный размер) формируется сеточная модель, при необходимости строится призматический слой вблизи поверхности, определяются области локального измельчения, задается тип ячеек. Неструктурированные сетки наиболее предпочтительны для моделирования задач в интересах промышленных приложений, поскольку не подразумевают ручного труда и строятся полностью в автоматическом режиме в короткие сроки. Однако здесь необходимо уделять должное внимание качеству получаемых сеточных элементов [Никитин и др., 2021; Борисенко и др. 2018]. Кроме того, использование неструктурированных сеток требует адаптации применяемых численных методов, например, в части построения численных схем, аппроксимации расчетных величин, а также вычислению потоков и градиентов. В связи с этим, в данной диссертационной работе приводится серия исследований по применению на неструктурированных сетках ограничителя потока газодинамических величин и методов расчета градиентов. В результате показано, что на неструктурированной сетке ограничитель может срабатывать даже в области невозмущенного потока, а форма и геометрия контрольного объема может вносить до 10% в погрешность вычисления градиентов. Поэтому для повышения точности расчета на неструктурированных сетках с разными типами ячеек предложен

оригинальный метод вычисления ограничителя потока и оригинальный гибридный метод расчета градиентов. Представленные методы обеспечивают монотонность решения и показывают наиболее точный результат при решении задач сверхзвуковой и гиперзвуковой аэродинамики.

При моделировании сверхзвуковых течений с точки зрения устойчивости численного решения наиболее сложным является этап прохождения ударной волны по равномерной невозмущенной области. Известно, что устойчивость решения в этом случае можно повысить введением геометрического многосеточного метода в начальный этап вычислительной процедуры, соответствующий инициализации расчетной области [Dogu Saraeni, 2013; Стручков, 2021]. Дополнительная процедура начальной инициализации позволяет обеспечить формирование структуры потока вблизи обтекаемого объекта во время распространения по расчетной области начального возмущения. Наибольший эффект от применения этой процедуры, выражающийся в повышении устойчивости, достигается в случае моделирования течений с ударно-волновыми процессами, возникающими при сверхзвуковом течении.

Идея геометрического многосеточного метода состоит в генерации на основе исходной базовой сетки последовательности грубых сеток, на которых решается рассматриваемая задача до полной сходимости численного решения. Решение задачи начинается с самой грубой сетки в последовательности. За счет того, что огрубленные сетки имеют меньшее число ячеек, в сравнении с исходной базовой, решение на них имеет более высокую скорость сходимости. Затем, полученное решение интерполируется на более подробную сетку, а в итоге – на исходную базовую сетку, и используется как инициализация при расчете. Таким образом, за счет использования инициализации, максимально близкой к конечному решению, ускоряется процесс сходимости этого решения как на каждой сетке в последовательности, так и в итоге – на базовой сетке.

В случае использования структурированной расчетной сетки грубая сетка строится тривиальным образом, за счет поочередного удаления узлов в каждом координатном направлении. При рассмотрении неструктурированной сетки построение алгоритма огрубления является наиболее трудной задачей. Широкую популярность получил алгоритм агломерации на основе взвешенного графа [Nishikawa&Diskin, 2011; Mavriplis, 1999, 2002], при котором объединение контрольных объемов выполняется с учетом критерия качества, вычисляемому по геометрическим характеристикам ячейки. Однако метод так же имеет свои недостатки и вопрос выбора оптимального алгоритма огрубления остается открытым для детального изучения. В настоящей работе для получения макро-

ячеек и построения последовательности грубых сеток предлагается алгоритм на основе равномерного разбиения всей расчетной области, применимый на произвольных неструктурированных сетках [Стручков, 2021; Kozelkov et al., 2022(a)].

Если первая половина успеха применения алгоритма многосеточной инициализации зависит от алгоритма огрубления, то вторая заключается в построении наиболее устойчивого численного метода при расчете на последовательности грубых сеток. В работе [Волков, 2013] зачастую на этом этапе расчете используют явную разностную схему и рассматривают невязкое обтекание. Выбор явной схемы объясняется наиболее устойчивым поведением решения при расчете. Оригинальность алгоритма заключается в его реализации на модели памяти счетного модуля, а также в адаптации вычислительной процедуры (схема решения системы уравнений Навье-Стокса, схема расчета конвективных потоков) применительно к сложным макро-ячейкам, основываясь на проведенных численных экспериментах.

Известно, что сверхзвуковые течения являются сложным физическим процессом, сопровождающимся возникновением газодинамических разрывов и образованием ударных волн. При воспроизведении этих явлений к применяемому численному методу предъявляются достаточно жесткие требования в части точности, устойчивости и монотонности решения. Отметим, что базовая сетка может не обладать достаточной сеточной разрешимостью, и даже применение схем повышенного порядка точности не обеспечит получение решения требуемой точности. В этом случае точность решения можно повысить за счет построения локального измельчения расчетной сетки в областях с особенностями течения (ударная волна, контактный разрыв и прочее). Известно, что для выполнения данной задачи можно использовать метод динамически адаптивных сеток [Гильманов, 2000; Plewa et al., 2003, Alauzet, 2019; Alauzet&Loseille, 2010; Лисейкин & Паасонен, 2021; Цветкова и др., 2021; Tsvetkova 2020], позволяющий на основе получаемого решения автоматически измельчать сетку лишь в тех областях, для которых локально требуется его улучшить. Основным принципом метода адаптивно-встраивающихся сеток состоит в уменьшении размеров ячеек по средствам встраивания дополнительных ячеек. Данный подход позволяет измельчать только определенную часть расчетной сетки без изменения сетки в области с гладким решением.

В связи с актуальностью подобного метода при решении задач сверхзвукового обтекания различных объектов в настоящей работе представлено описание метода статической адаптации расчетной сетки. Построение локального измельчения осуществляется за счет встраивания дополнительных узлов, а область локального измельчения выбирается на основе численного критерия по величине градиента

плотности, скорости или давления. Особенность метода заключается в его применимости на произвольных неструктурированных сетках, что было достигнуто за счет использования граневой модели памяти и разработки оригинального метода формирования новых элементов расчетной сетки на основе топологии объемного элемента [Стручков и др., 2019; Struchkov et al., 2020].

Настоящая работа посвящена исследованию ударно-волновой структуры течения при сверхзвуковом обтекании тел различной конфигурации на произвольной неструктурированной сетке, включая описание ударных волн при их отражении и взаимодействии с пограничным слоем, а также характеристики распределения газодинамических величин в зависимости от параметров течения. Для этого в рамках работы разработаны численные методы вычислительной аэродинамики, обеспечивающие устойчивость, точность и монотонность численного решения при расчете сверхзвуковых течений. В работе представлены методы, эффективность которых показывается на решении фундаментальных задач сверхзвуковой аэродинамики. Наиболее подробно рассматривается задача сверхзвукового течения в канале, имитирующем модель простейшего бокового воздухозаборника. В качестве промышленно-значимой задачи, в которой методы диссертационной работы применяются как инструмент, исследуется характер сверхзвуковой аэродинамики маневренного летательного аппарата. Из всего приведенного вытекает *необходимость* и *актуальность* исследований, выполненных в диссертации.

Цели диссертационной работы

Диссертационная работа посвящена исследованию особенностей расчета сверхзвуковых течений на неструктурированных сетках, с последующей модификацией способа расчета градиентов и ограничителей потока для повышения точности результатов, а также разработкой методов многосеточной инициализации и статической адаптации для повышения скорости сходимости и точности решения. Повышение точности и скорости сходимости решения рассматривается как повышение эффективности моделирования.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Провести исследование ударно-волновой структуры течения при сверхзвуковом обтекании тел различной конфигурации на произвольной неструктурированной сетке. Получить достоверное описание ударных волн при их отражении и взаимодействии с пограничным слоем, а также характеристики распределения газодинамических величин

в зависимости от параметров течения, включая случаи внедрения дополнительных механических элементов.

2. Исследовать при расчете на неструктурированной сетке (на задаче сверхзвукового течения в канале с клином) применимость ограничителя потока. В целях повышения точности разработать и реализовать модифицированный вариант схемы расчета ограничителя потока. Провести калибровку и получить значение константы, входящей в выражение, определяющего порог срабатывания ограничителя. Показать повышение точности моделирования течения при использовании разработанной схемы расчета ограничителя на различных сетках. Получить достоверную картину распространения ударной волны в газовой среде.
3. Исследовать свойства метода Грина-Гаусса и метода наименьших квадратов для расчета градиента с целью выявления зависимости точности получаемого значения от формы расчетной ячейки. Разработать и реализовать гибридную схему расчета градиента с использованием весовой функции. Разработать весовую функцию, учитывающую геометрические особенности расчетной ячейки. Показать повышение точности моделирования сверхзвуковых течений для получения распределения газодинамических величин при использовании разработанной схемы на различных сетках.
4. Разработать и реализовать метод, основанный на алгоритме построения последовательности грубых сеток, для инициализации поля течения. Для моделирования сверхзвукового обтекания на произвольной неструктурированной сетке показать ускорение сходимости решения при использовании данного метода.
5. Разработать и реализовать метод статической адаптации расчетной сетки, основанный на выделении особенностей течения и построении в них областей локального измельчения. Показать повышение достоверности моделирования процессов сверхзвукового течения вследствие увеличения точности разрешения фронта ударных волн при расчете на сетке, полученной в результате применения алгоритма адаптации.

Методы исследования и степень достоверности результатов

Методы исследования, используемые в диссертации, основываются на методе конечных объемов и численном решении системы уравнений Навье-Стокса. Исследование турбулентного течения осуществляется с использованием осреднённых по Рейнольдсу моделей турбулентности.

Достоверность положений диссертационной работы доказана результатами моделирования на ЭВМ характерных тестовых задач и сопоставления получаемых численных решений с аналитическим решением, данными из литературных источников, а так же полученных в результате проведения эксперимента.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы определяется полученными результатами:

1. Исследование ударно-волновой структуры течения при сверхзвуковом обтекании на произвольной неструктурированной стеке, включая описание ударных волн при их отражении и взаимодействии с пограничным слоем, а также характеристики распределения газодинамических величин в зависимости от параметров течения в совокупности со случаями внедрения дополнительных механических элементов.
2. Модифицированная схема расчета ограничителей потока. Константа порога срабатывания модифицированного ограничителя для расчета на произвольных сетках.
3. Гибридная схема расчета градиента газодинамических величин. Весовая функция в гибридной схеме.
4. Метод формирования начальных полей газодинамических величин на основе многосеточной инициализации применительно к неструктурированным расчетным сеткам.
5. Метод статической адаптации расчетной сетки (в том числе и неструктурированной) к особенностям течения, обеспечивающий построение области локального измельчения сложной геометрической формы в автоматическом режиме в соответствии с заданным критерием.

Основные положения, выносимые на защиту

Положения, выносимые на защиту:

1. Результаты исследования ударно-волновой структуры течения при сверхзвуковом обтекании тел различной конфигурации на произвольной неструктурированной сетке, включая описание ударных волн при их отражении и взаимодействии с пограничным

слоем, а также характеристики распределения газодинамических величин в зависимости от параметров течения в совокупности со случаями внедрения дополнительных механических элементов.

2. Схема расчета ограничителя потока, порог срабатывания которого основан на газодинамических параметрах течения. Результаты калибровки и значение константы срабатывания ограничителя. Результаты исследования применимости ограничителя потока для моделирования сверхзвуковых течений, показывающие возможность достоверно воспроизводить поведение ударной волны в процессе ее распространения в газовой среде.
3. Гибридная схема вычисления градиента газодинамической величины, обеспечивающая повышение точности определения аэродинамических характеристик тел. Весовая функция для гибридной схемы, учитывающая форму расчетной ячейки. Результаты исследования точности схем вычисления градиентов газодинамических величин в зависимости от формы расчетной ячейки, демонстрирующие увеличение точности и повышение достоверности моделирования процессов сверхзвукового течения газа.
4. Метод многосеточной инициализации расчетного поля, применяемый на неструктурированных сетках с гранево-ячеечной структурой хранения данных, используемых при конечно-объемном способе дискретизации. Результаты исследования ускорения сходимости решения при использовании многосеточной инициализации на задачах сверхзвукового обтекания объектов, показывающие сокращение (до 20%) времени расчета задач сверхзвуковых течений.
5. Метод статической адаптации неструктурированной расчетной сетки, использующей гранево-ячеечную структуру хранения данных, при конечно-объемном способе дискретизации. Результаты исследования применения метода адаптивно-встраивающихся сеток для моделирования сверхзвуковых течений, выражаемые в повышении достоверности моделирования процессов вследствие увеличения точности разрешения фронта ударных волн, получаемых на сеточной модели с областями локального измельчения, соответствующих положению особенностей сверхзвукового течения.

Теоретическая и практическая значимость работы

Получены теоретические и практические результаты по исследованию подходов к моделированию сверхзвуковых течений с использованием неструктурированных расчетных сеток. Предложенные методы и алгоритмы позволяют повысить точность и эффективность решения задач по моделированию сверхзвукового обтекания объектов.

Все разработки, выполненные в рамках настоящей работы, реализованы на базе пакета программ ЛОГОС – отечественном программном обеспечении для инженерного анализа [СВ1-СВ8, ТК1-ТК9, СР1-СР5]. С 2018 года, в состав пакета ЛОГОС входят алгоритмы, схемы и решения, представленные в диссертации, которые используются для решения промышленных задач авиастроения [СВ1-СВ7]. Уже в настоящее время пакет программ ЛОГОС прошел апробацию и используется более чем на 50 предприятиях России.

Полученные результаты в диссертации использовались в следующих российских исследовательских проектах:

- Проект «Разработка отечественного программного обеспечения», утвержденный постановлением Правительства Российской Федерации №993 от 30.09.2016;
- Проект «Создание единой виртуальной модели функционирования боевого маневренного самолета» утвержденный постановлением Правительства Российской Федерации №707.

Все идеи, методы и результаты, представленные в диссертации, используются в рамках исследований, проводимых в молодежной лаборатории «Разработка численных методов, моделей и алгоритмов для описания гидродинамических характеристик жидкостей и газов в естественных природных условиях, и условиях функционирования промышленных объектов в штатных и критических условиях на суперкомпьютерах петафлопсного класса», организованной в 2021 году в рамках основных направлений деятельности «Национального центра физики и математики» (г. Саров) при поддержке научно-образовательного центра мирового уровня «Техноплатформа 2035». Основной целью лаборатории является привлечение молодых исследователей к развитию численных методов, моделей и алгоритмов для описания физических характеристик разреженных газов, многофазных многокомпонентных сред, крупномасштабных геофизических явлений (цунами), на основе полной гидродинамической системы уравнений Навье-Стокса для моделирования физических явлений в естественных природных условиях, и условиях функционирования промышленных объектов в штатных и критических условиях.

Материалы диссертационной работы используются в рамках Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020-2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 075-15-2022-309 от 20.04.2022).

Соответствие содержания диссертации специальности

Область исследования соответствует формуле специальности 1.1.9 «Механика жидкости, газа и плазмы». Работа соответствует следующим пунктам области исследования паспорта специальности:

- П.4. Течения сжимаемых сред и ударные волны (все параграфы диссертационной работы).
- П.9. Аэродинамика и теплообмен летательных аппаратов (параграфы 3.4-3.5 диссертационной работы).
- П.11. Пограничные слои, слои смешения, течения в следе (параграфы 3.2-3.3 диссертационной работы).
- П.12. Струйные течения. Кавитация в капельных жидкостях (параграф 2.5 диссертационной работы).

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены на всероссийских и международных конференциях, таких как «XXXII Научно-Техническая конференция по аэродинамике» (г. Жуковский, 2021 г.), Международная научно-техническая конференция «Харитоновские научные чтения» (г. Саров, 2021), Международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии» (г. Нижний-Новгород, 2021), «I Всероссийская школа-семинар НЦФМ «Математическое моделирование на супер-ЭВМ экса- и зеттафлопсной производительности» (г. Саров, 2022), «7 Научно-техническая конференция для специалистов организаций, входящих в АО «Концерн ВКО «Алмаз-Антей», профильных организаций, НИИ и ВУЗов» (г. Москва, 2022), первая международная научно-техническая конференция «Скоростной транспорт будущего: перспективы, проблемы, решения» (г. Алушта, 2022), Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2022» (г. Новосибирск, 2022), 20-я научно-техническая конференция «Молодежь в науке» (г. Саров, 2022), XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Санкт-Петербург, 2023). Результаты исследований, представленные в диссертации, неоднократно обсуждались на рабочих совещаниях и семинарах со специалистами ПАО «Компания Сухой» и ФГБОУ ВО «МАИ», а также на семинарах научного центра мирового уровня «Сверхзвук».

Публикации

Основные положения диссертации представлены в 8 публикациях, включенных в список ВАК и/или входящих в мировые индексы цитирования (SCOPUS, Web of Science), в 9 работах в трудах конференций. Получено 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора

Во всех работах автор диссертации выполнял численные и аналитические расчёты самостоятельно, а также принимал непосредственное участие в обсуждении и интерпретации полученных результатов.

Лично диссертантом или при его определяющем участии:

- проведено исследование применимости схем ограничителя потока и методов расчета градиента на различных сетках;
- разработана и реализована модифицированная схема расчета ограничителя, проведена калибровка и получено значение константы порога срабатывания модифицированного ограничителя;
- разработана и реализована гибридная схема вычисления градиента газодинамической величины. Получена весовая функция для гибридной схемы;
- разработаны и реализованы в рамках метода многосеточной инициализации способ построения последовательности грубых сеток, а так же математическая модель для расчета на грубых сетках. Проведена отработка применения метода для получения ускорения сходимости численного решения;
- разработан и реализован метод статической адаптации расчетной сетки. Проведена отработка применения метода для повышения точности численного решения при расчете на сеточной модели с областями локального измельчения;
- проведена отработка применения разработанных схем и методов для исследования сверхзвукового течения.

Научному руководителю д.ф.-м.н. Козелкову А.С. принадлежит выбор методов исследований.

Совместно с Жучковым Р.Н. (к.т.н.) и Зеленским Д.К. (к.ф.-м.н.) были рассмотрены различные подходы в методе многосеточной инициализации, обсуждались методические вопросы. Совместно с Корневым А.В. были подготовлены постановки исследования сверхзвукового течения в канале и условия сверхзвукового обтекания маневренного летательного аппарата.

По полученным материалам, совместно с Козелковым А.С., Жучковым Р.Н. и Зеленским Д.К. были написаны статьи в научные журналы.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук Козелкову Андрею Сергеевичу за ценные замечания к работе. Также автор выражает благодарность кандидату технических наук Жучкову Роману Николаевичу за поддержку и постоянное внимание к работе. Автору приятно поблагодарить всех соавторов и коллег из лаборатории кандидата физико-математических наук Зеленского Дмитрия Константиновича, а так же лично его, и сотрудников Института теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» за сотрудничество и помощь.

Глава 1. Численные методы и алгоритмы повышения точности и устойчивости моделирования сверхзвуковых течений

1.1 Введение

Уравнения Навье-Стокса представляют собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения используются в различных приложениях (гидродинамика, аэродинамика) для моделирования широкого спектра течений: от простого потока воды в трубе до сложного потока воздуха над крылом самолета. Одним из наиболее важных и сложных типов течения является сверхзвуковое, характерной особенностью которого является наличие в потоке ударных волн и контактных разрывов.

Для численного решения системы уравнений Навье-Стокса описано достаточно большое количество математических моделей. В случае моделирования сверхзвуковых течений в целях повышения эффективности применения этих моделей можно провести их адаптацию для расчета на произвольных неструктурированных сетках. Для этого при непосредственном участии диссертанта как лично, так и в командной работе со своими коллегами и руководителями, был реализован ряд математических схем и алгоритмов, которые рассмотрены в данной главе.

В параграфе 1.2 представлено описание основных уравнений (системы уравнений Навье-Стокса) и способа их дискретизации методом конечных объемов с ориентацией на произвольные неструктурированные сетки. В параграфе 1.3 рассматривается вопрос применения ограничителей газодинамических величин при решении задач внешней аэродинамики. В параграфе 1.4 описан гибридный метод расчета градиентов, применяемый для повышения робастности вычислительного алгоритма. В параграфах содержится описание реализации представленного метода или алгоритма, а так же ряд тестовых расчетов, используемых для методической работы при рассмотрении данного вопроса. В заключении суммированы результаты к главе.

1.2 Основные уравнения и способы дискретизации

Нестационарные трехмерные течения вязкого газа с учетом теплопроводности описываются системой уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу [Флетчер, 1991; Ландау&Лифшиц, 1988; Лойцянский, 1979], которая в консервативной форме, в декартовых координатах, может быть записана в следующем виде (знаки осреднения убраны):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla(\tau_\mu + \tau_t), \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} h) = \nabla[\vec{u}(\tau_\mu + \tau_t) - (\vec{q}_\mu + \vec{q}_t)]. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

В системе уравнений (1.2.1) используются обозначения: ρ – плотность; \vec{u} – вектор скорости течения с компонентами u , v , w ; p – давление; $E = C_v T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энергия газа; $h = C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энтальпия газа; τ_μ и τ_t – молекулярная и турбулентная составляющие тензора касательных напряжений соответственно; q_μ и q_t – молекулярная и турбулентная составляющие плотности теплового потока соответственно; T – температура; $C_v = (C_p T - R/m)$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме; C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; R – универсальная газовая постоянная; m – молярная масса газа.

Величины молекулярной составляющей тензора касательных напряжений ньютоновской среды удовлетворяют реологическому закону Ньютона, удовлетворяющему связи между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформаций, а компоненты вектора плотности теплового потока связаны с локальным градиентом температуры законом Фурье [Ландау&Лифшиц, 1988; Оран&Борис, 1990; Лойцянский, 1979]:

$$\tau_\mu = 2\mu(T) \left(S - \frac{1}{3} I \nabla \vec{u} \right), \quad (1.2.2)$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^t \right), \quad (1.2.3)$$

$$q_\mu = \lambda(T) \nabla T. \quad (1.2.4)$$

Коэффициент динамической вязкости $\mu(T)$ и коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ в зависимости от температуры потока определяются по формуле Сазерленда [Лойцянский, 1979; Шлихтинг, 1974]:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.5} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}, \quad (1.2.5)$$

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.5} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}, \quad (1.2.6)$$

где μ_0 и λ_0 соответственно динамическая вязкость и коэффициент теплопроводности при температуре T_0 , T_s – константа Сазерленда.

Система уравнений (1.2.1) является незамкнутой из-за неизвестной связи одних из основных переменных этой системы τ_i и q_i с осредненными параметрами течения. Эта связь может быть установлена с помощью дополнительных соотношений, которые в общем случае называются моделями турбулентности. Линейные дифференциальные модели турбулентности используют эмпирические соотношения для коэффициента турбулентной вязкости μ_t .

Например, в модели Спаларта–Аллмараса [Spalart&Allmaras, 1992] рассматривается единственное уравнение переноса, записанное относительно модифицированной кинематической турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} + P^v - D^v \quad (1.2.7)$$

В уравнении (1.2.7) генерационный и диссипативный члены P^v и D^v являются источниковыми членами и определяются следующим образом:

$$D^v = \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \quad (1.2.8)$$

$$P^v = c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{b1} \rho f_{t2} \tilde{S} \tilde{\nu}, \quad (1.2.9)$$

где

d – ближайшее расстояние до твердой стенки,

κ – постоянная Кармана.

Определим формулы для других параметров, участвующих в уравнении переноса турбулентной вязкости:

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2}, \quad (1.2.10)$$

Здесь Ω – представляет собой модуль тензора завихренности:

$$\Omega = \left(2\Omega_{ij}\Omega_{ij}\right)^{1/2}, \quad (1.2.11)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (1.2.12)$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad (1.2.13)$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad (1.2.14)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, \quad (1.2.15)$$

$$C_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b1})}{\sigma}. \quad (1.2.16)$$

Функция f_{t2} обеспечивает подавление численного перехода от ламинарного режима в пограничном слое к турбулентному и определяется выражением:

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4} \chi^2). \quad (1.2.17)$$

Эффективная турбулентная вязкость в данной модели определяется согласно выражению:

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}, \quad (1.2.18)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad (1.2.19)$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}_t}{\nu}. \quad (1.2.20)$$

Эмпирические константы модели следующие: $\sigma = \frac{2}{3}$, $\kappa = 0,41$, $c_{b1} = 0,1355$,

$$c_{b2} = 0,622, C_{w2} = 0,3, C_{w3} = 2, C_{v1} = 7,1, C_{t3} = 1,2, C_{t4} = 0,5.$$

Модель Спаларта-Аллмараса разрабатывалась для расчета задач внешней аэродинамики, и в настоящее время, является одной из наиболее используемых моделей при моделировании в практических приложениях.

Представленная выше система уравнений аппроксимируется методом конечных объемов [Betelin et al., 2014; Deryugin et al., 2017, 2019; Волков и др., 2013; Ferziger&Peric, 2002; Leveque, 2002; Zienkiewicz et al., 2005; Смирнов&Зайцев, 2004] и использует интегральную формулировку основных законов сохранения. Дискретные аналоги слагаемых записываются для контрольного объема путем суммирования по граням.

Метод конечных объемов основан на интегрировании исходных дифференциальных уравнений по контрольному объему. Контрольные объемы (ячейки сетки) являются произвольными многогранниками, покрывающие расчетную область без зазоров и наложений. Каждый многогранник ограничен произвольным числом граней. Вершинами граней являются узлы сетки. Общий вид ячейки показан на рисунке 1.2.1.

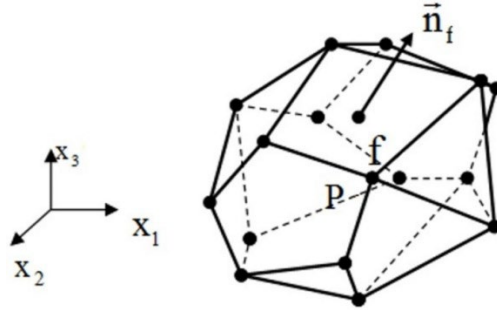


Рис. 1.2.1 – Общий вид ячейки сетки

Для численного решения методом конечных объемов система уравнений Навье-Стокса может быть записана в векторной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} W dV + \oint_{\Delta \Sigma_P} (F - G) dS = \int_{\Delta V} H dV, \quad (1.2.22)$$

где вектор W – вектор консервативных переменных, F и G – вектора конвективных и диффузионных потоков, H – источниковый член,

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u u_n + p n_x \\ \rho v u_n + p n_y \\ \rho w u_n + p n_z \\ \rho H u_n + \rho u_n \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \\ \tau u + q \end{pmatrix}, \quad (1.2.23)$$

здесь u_n – нормальная составляющая скорости, q – тепловой поток, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений.

Полное описание способа аппроксимации системы уравнений (1.2.22) представлено в работах авторов [Ferziger&Peric, 2002, Deryugin et al., 2015; Struchkov et al., 2023].

При решении задач большое значение имеет точность вычисления конвективных потоков. Для задач аэродинамики наиболее широкую популярность получили схемы, построенные основе решения задачи Римана о распаде разрыва. К таким схемам относятся схемы семейства AUSM (Advection Upstream Splitting Method) [Roe, 1986; Liou, 1996; Rodionov, 2018; Kotov&Surzhikov, 2011; Matsuyama Shingo, 2014] и в частности схема AUSM+ [Liou, 1996; Rodionov, 2018; Matsuyama Shingo, 2014].

Согласно автору работы [Vierendeels et al., 2001; Kim et al., 2001] в схеме AUSM+ конвективный поток через грань рассчитывается в виде:

$$F_f = c_f (\bar{M}_L^+ U_L + \bar{M}_R^- U_R) + \left(P_L^+ \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}} P_L + P_R^- \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}} P_R \right) \quad (1.2.24)$$

где c_f – скорость звука на грани; U_L и U_R – векторы примитивных переменных слева и справа от грани f ; P_L и P_R – вектор давления $P = P\{0, n_x, n_y, n_z, 0\}^T$ слева и справа от грани f , \bar{M}_L^+ , \bar{M}_R^- , $P_L^+ \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}}$, $P_R^- \Big|_{\alpha=\frac{3}{16}}$ – параметры схемы.

Если $M_L^+ + M_R^- \geq 0$, где M_L и M_R – числа Маха слева и справа от грани:

$$\bar{M}_L^+ = M_L^+ + M_R^- [(1-\omega)(1+f_R) + f_R - f_L], \quad \bar{M}_R^+ = M_R^- \omega(1+f_L). \quad (1.2.25)$$

Если $M_L^+ + M_R^- < 0$,

$$\bar{M}_L^+ = M_L^+ \omega(1+f_L), \quad \bar{M}_R^- = M_R^- + M_L^+ [(1-\omega)(1+f_L) + f_L - f_R]. \quad (1.2.26)$$

Параметр ω задан функцией, зависящей от кубов отношений давлений, и принимает минимальное значение в большей части области, за исключением областей с высоким градиентом давления, каких как области ударных волн, скачков и разрывов:

$$\omega(p_L, p_R) = 1 - \min\left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L}\right)^3. \quad (1.2.27)$$

Параметр $f_{L,R}$ принимает так же минимальное значение, кроме областей с осцилляциями решения:

$$f_{L,R} = \begin{cases} \left(\frac{p_{L,R}}{p_s} - 1\right) \min\left(1, \frac{\min(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}{\min(p_L, p_R)}\right)^2, & P_L^+ p_L + P_R^- p_R \neq 0, \\ 0 & \end{cases} \quad (1.2.28)$$

Для определения параметров на грани используются полиномы второго порядка:

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2, & |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|), & |M| > 1, \end{cases}, \quad P_\alpha^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \alpha M(M^2 - 1), & |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(M)), & |M| > 1. \end{cases} \quad (1.2.29)$$

Для расчета конвективных потоков необходимо провести реконструкцию решения, заключающуюся в определении параметров слева и справа от грани f . При решении задач газовой динамики, реконструкция решения может производиться относительно примитивных переменных Q , консервативных переменных W , а также относительно акустических инвариантов. Для первого порядка аппроксимации в качестве параметров слева и справа от грани берутся значения из центра соответствующей ячейки (рисунок 1.2.2): $\phi_f^- = \phi_P$, $\phi_f^+ = \phi_E$.

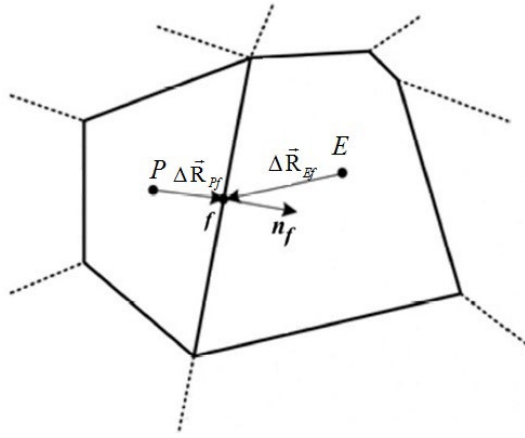


Рисунок 1.2.2 – Реконструкция величин

Для нахождения величины на грани обычно используют реконструкцию решения второго порядка аппроксимации [Kim, 2001; Ferziger& Peric, 2002]:

$$\phi_f^- = \phi_P + \alpha_f^- (\Delta \bar{R}_{Pf} \cdot \nabla \phi_P), \quad (1.2.30)$$

$$\phi_f^+ = \phi_E + \alpha_f^+ (\Delta \bar{R}_{Ef} \cdot \nabla \phi_E),$$

где ϕ_f^- и ϕ_f^+ - значение переменной на слева и справа от грани, ϕ_P и ϕ_E - значение переменной в центре ячеек E и P (рисунок 2), $\Delta \bar{R}_{Pf}$ и $\Delta \bar{R}_{Ef}$ - расстояние от центра ячеек E и P до центра грани f , $\nabla \phi_E$ и $\nabla \phi_P$ - величина градиента в ячейках E и P , α_f^- и α_f^+ - функции-ограничители, предназначенные для предотвращения появления осцилляций на разрывных решениях. Использование функции ограничителя позволяет контролировать величину градиента (уменьшать значение градиента, умножая его на величину $\alpha_f \leq 1$), используемого для восстановления значения слева и справа от грани ячейки [Jasak, 1996; Sweby, 1984].

Отметим, что при расчете на неструктурированных сетках проблема точного вычисления градиента является достаточно актуальной, в силу наличия возможности появления ячейки сколь угодно сложной формы. Кроме того на таких сетках функция ограничителя может иметь случайный характер включения, даже в областях невозмущенного потока. Поэтому для получения более точного решения при расчете на неструктурированной сетке необходимо выполнить модификацию как самого выражения ограничителя потока, так и метода расчета градиента газодинамической величины.

Далее в работе рассматривается практическая проблема получения устойчивого численного решения при использовании функции ограничителей и вопрос точности вычисления градиентов при расчете на неструктурированных сетках.

1.3 Модификация метода расчета ограничителей потока

Пространственная дискретизация второго и более высокого порядка требует использования так называемых функций ограничителя для сохранения монотонности решения в областях с высокими градиентами. По сути, введение ограничителя схемы сводится к «сглаживанию» ложных максимальных экстремумов расчетных величин в потоке, при этом минимальные экстремумы, соответствующие физике процесса, не уменьшаются.

На неструктурированных сетках использование функции ограничителя позволяет контролировать величину градиента (уменьшать значение градиента, умножая его на величину $\alpha_E \leq 1$), используемого для восстановления значения слева и справа от грани ячейки. Так, например, в [Barth&Jespersen, 1989] в результате применения ограничителя удалось получить гладкое решение трансзвукового течения без осцилляций даже на нерегулярных треугольных сетках. Функция ограничителя должна быть равна нулю при сильных разрывах, чтобы получить схему первого порядка, которая гарантирует монотонность, но в областях «монотонного» потока функция ограничителя принимает значение единицы, и реконструкция значений на грани не ограничена. Переход от ограниченного значения к неограниченному должен быть плавным – только в этом случае можно ожидать улучшения сходимости.

Корректное поведение функции ограничителя является особенно важным вопросом при его использовании в инженерных кодах для решения промышленно-ориентированных задач на неструктурированных сетках. Наиболее часто в газодинамических расчетах используется ограничитель Venkatakrishnan [Venkatakrishnan, 1993], благодаря наилучшим свойствам сходимости и монотонности. Данный ограничитель контролирует значение градиента ϕ_E в ячейке E согласно следующему выражению:

$$\alpha_E = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{l,\max}^2 + \varepsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{l,\max}}{\Delta_{l,\max}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{l,\max} \Delta_2 + \varepsilon^2} \right], & \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{(\Delta_{l,\min}^2 + \varepsilon^2) \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_{l,\min}}{\Delta_{l,\min}^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_{l,\min} \Delta_2 + \varepsilon^2} \right], & \Delta_2 < 0 \\ 1, & \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{l,\max} &= \phi_{\max} - \phi_E, \\
\Delta_{l,\min} &= \phi_{\min} - \phi_E, \\
\Delta_2 &= \frac{1}{2}(\nabla \phi_f \cdot \Delta \bar{\mathbf{R}}_{Ef}).
\end{aligned}
\tag{1.3.2}$$

где ϕ_{\max} и ϕ_{\min} – максимальное и минимальное значение величины во всех соседних ячейках, включая значение в самой ячейке E , $\Delta \bar{\mathbf{R}}_{Ef}$ – расстояние от центра ячейки E (или P) до центра грани. Параметр ε^2 контролирует величину ограничителя и вычисляется по следующему выражению [Venkatakrishnan, 1993]:

$$\varepsilon^2 = (K\Delta h)^3 \tag{1.3.3}$$

где K – константа (нормирующий коэффициент), Δh – характерный размер ячейки.

В (1.3.1) ε^2 служит условным порогом срабатывания функции ограничителя. Колебания ниже этого порога допускаются в решении и не рассматриваются ограничителем. Нулевое значение параметра ε^2 означает, что ограничитель активен даже в около константных областях, в то время как очень высокое значение параметра ε^2 означает фактически полное отсутствие ограничения. Такая модификация функции ограничителя позволяет защититься от «случайных срабатываний», добиться улучшения сходимости и устойчивого решения на неструктурированных сетках.

Введем обозначение $y = \frac{\Delta_{l,\max}}{\Delta_2}$ (или $y = \frac{\Delta_{l,\min}}{\Delta_2}$) и представим функцию из выражения (1.3.1) в следующем виде [Venkatakrishnan, 1993]:

$$\alpha_E = \frac{y^2 + 2y + \varepsilon}{y^2 + y + 2 + \varepsilon} \tag{1.3.4}$$

где $\Delta_{l,\max}$ (или $\Delta_{l,\min}$) из (1.3.2) – приращение решения.

При значении ε , преобладающей по величине над приращением решения или же при неограниченном значении ε , функция ограничителя принимает значение единицы, то есть значение градиента (в выражении для нахождения величины на грань) ничем не ограничено. В том случае, когда приращение решения преобладает над величиной ε (например, в области с большими градиентами или при малом значении ε), решение само определяет значение функции ограничителя (слагаемое $\frac{y^2 + 2y}{y^2 + y + 2}$ выражения (1.3.4)), тем самым задает степень ограничения.

Рассмотрим действие функции ограничителя (при различных значениях параметра K) на примере решения задачи сверхзвукового обтекания клина, в которой параметры набегающего потока определяются величинами: число Маха 2, давление 101325 Па, температура 300° К [Волков и др. 2013]. Для моделирования применяется структурированная расчетная сетка (рисунок) с числом ячеек 95000. Задача считается на установление, в результате оценивается распределение полного давления вдоль линии по каналу (как показано на рисунке 1.3.1).

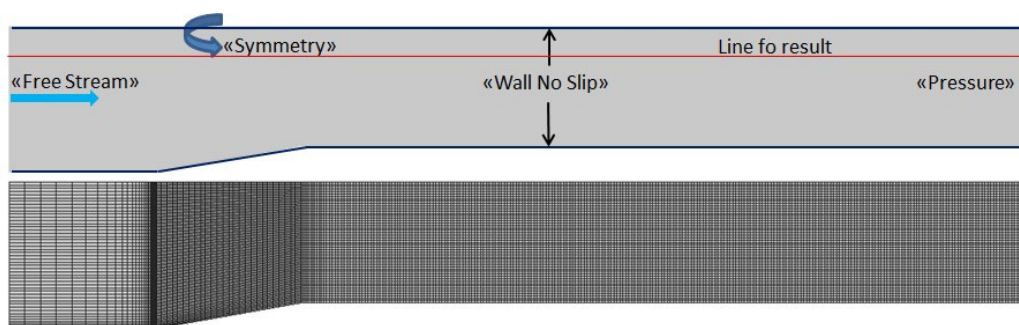


Рисунок 1.3.1 – Расчетная область, сетка и линия оценки распределения полного давления

При сверхзвуковом течении в канале с клином образуется присоединенный скачок уплотнения, приводящий к формированию ударно-волновой структуры потока в канале (зарождение скачка уплотнения, его развитие, отражение от стенок канала и взаимодействие с системой (веером [Волков и др. 2013]) волн разрежения) (рисунок 1.3.2).

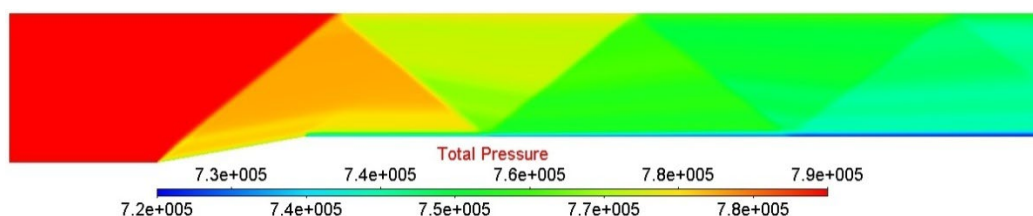


Рисунок 1.3.2 – Структура потока, поле полного давления

Каждая ударная волна характеризуется своим фронтом – поверхностью, на которой газодинамические величины терпят скачок, в то время как вне фронта они изменяются непрерывно. С практической точки зрения, применяемая численная схема должна обеспечивать устойчивость и сохранять монотонность решения во всех областях течения, включая ударно-волновые фронты.

Для исследования зависимости решения от функции ограничителя возьмем участок первой серии скачков. Рассмотрим график (рисунок 1.3.3) распределения полного давления вдоль линии в указанной области, полученного без ограничителя, а также с ограничителем (Venkatakrishnan) для разных значений параметра K в выражении (1.3.3).

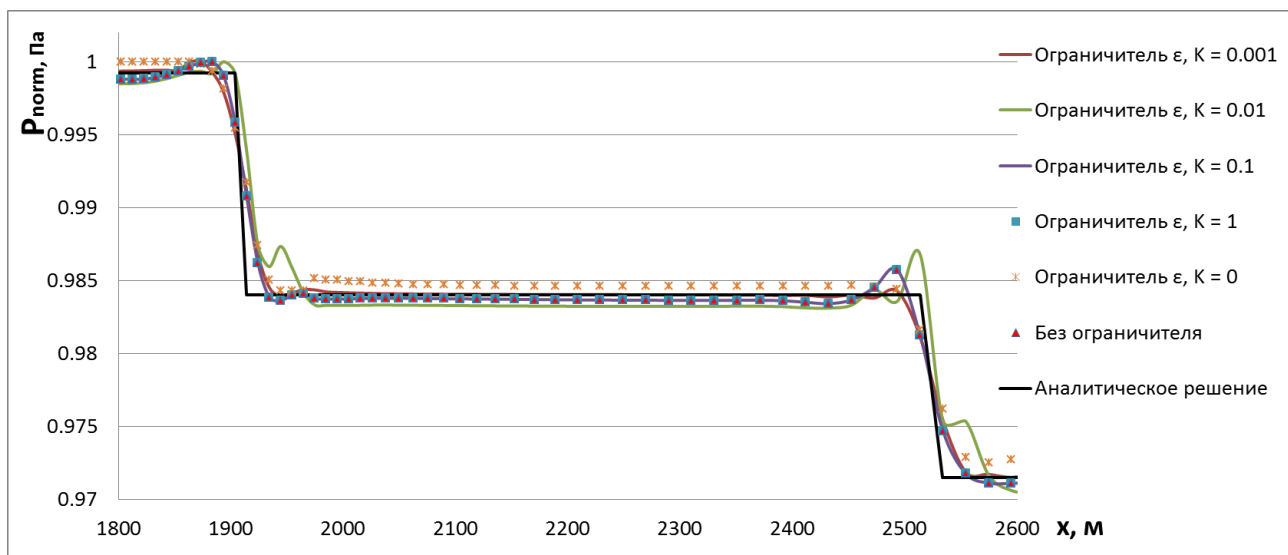


Рисунок 1.3.3 – График распределения полного давления

Согласно графику, при $K=0.1$ и $K=1$ получаемый результат совпадает с результатом расчета без применения ограничителя, то есть при таких значениях K решение полностью неограниченно (берется полное вычисленное значение градиента при реконструкции). При $K=0.01$ появляются дополнительные максимумы, что может внести существенную погрешность в решение.

Наилучшую точность (в сравнении с аналитическим решением) и свойства монотонности решение имеет при $K=0$ и $K=0.001$. Однако $K=0$ означает вероятность включения функции ограничителя во всей области, то есть имеет случайный характер срабатывания (рисунок 1.3.4), что так же недопустимо.

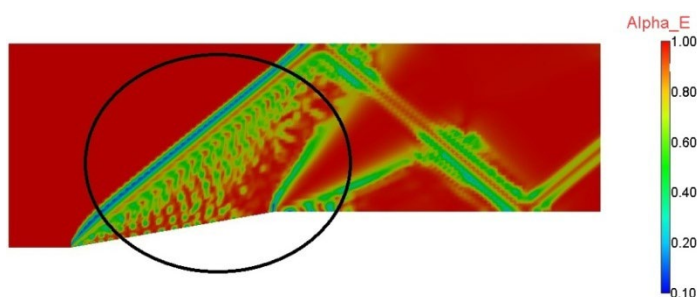


Рисунок 1.3.4 – Случайный характер включения функции ограничителя (1.3.1) при $K=0$

Решение при $K=0.001$ имеет минимальную амплитуду осцилляций и, в целом, характеризуется хорошим свойством монотонности. Однако ввиду очень малого значения параметра K ограничитель практически постоянно активирован (возможны проявления случайного характера включения на других сеточных моделях).

Вычисление параметра ϵ по формуле (1.3.3) связано лишь с характерным размером ячейки, что делает его функцией, зависящей от геометрических параметров расчетной

сетки. В данном случае активация ограничителя зависит лишь от параметров дискретной модели и увеличивает вероятность срабатывания ограничителя в областях локального измельчения сеточной модели. Одновременно с этим, при такой формулировке параметр ε никак не связан с характеристиками потока, что так же повышает вероятность случайного характера включения функции ограничителя для конкретной газодинамической величины. Кроме того, величина характерного размера ячеек справедлива только в случае ячеек «простой» геометрической формы, а в случае ячейки в форме произвольного многогранника эта величина не имеет четкого определения.

Для использования функции ограничителя на ячейках произвольной формы необходима модификация выражения (1.3.3) для вычисления ε . Предлагается сделать параметр ε функцией характеристик потока, то есть функцией той величины, для которой применяется ограничитель. Например, можно предложить иной вариант записи для параметра ε , в котором K – является порогом срабатывания функции:

$$\tilde{\varepsilon} = K\phi, \quad (1.3.5)$$

где ϕ – газодинамическая переменная (то есть значение ограничителя рассчитывается на основе самой газодинамической переменной, для которой вычисляется ограничитель: при вычислении давления через ϕ обозначается давление, для вычисления плотности – обозначается плотность, аналогично и для компонент скорости).

Введение газодинамической переменной в качестве параметра при вычислении $\tilde{\varepsilon}$, отвязывает ограничитель от геометрических характеристик ячеек сетки. В настоящей формулировке [Struchkov, 2023] параметр $\tilde{\varepsilon}$ наделяется физическим смыслом – путем изменения константы K определяется величина колебаний расчетных газодинамических величин, которые «фильтруются» функцией ограничителя. Например, $K=0.01$ значит, что порог срабатывания функции ограничителя равен 1% от газодинамической величины ϕ , то есть функция ограничителя включается на колебаниях решения, когда приращение решения в ячейке превышает 1% от решения в ячейке.

Проанализируем применение модифицированной формулы для задачи сверхзвукового течения в канале с клином и рассмотрим случай, когда в (1.3.5) величина $K=0.01$.

Распределение полного давления в случае $K=0.01$ из (1.3.5) обладает сопоставимым с решением, полученным при $K=0.001$ в (1.3.3), свойством монотонности. Однако, в случае применения выражения (1.3.5) функция ограничителя имеет четкую физическую интерпретацию.

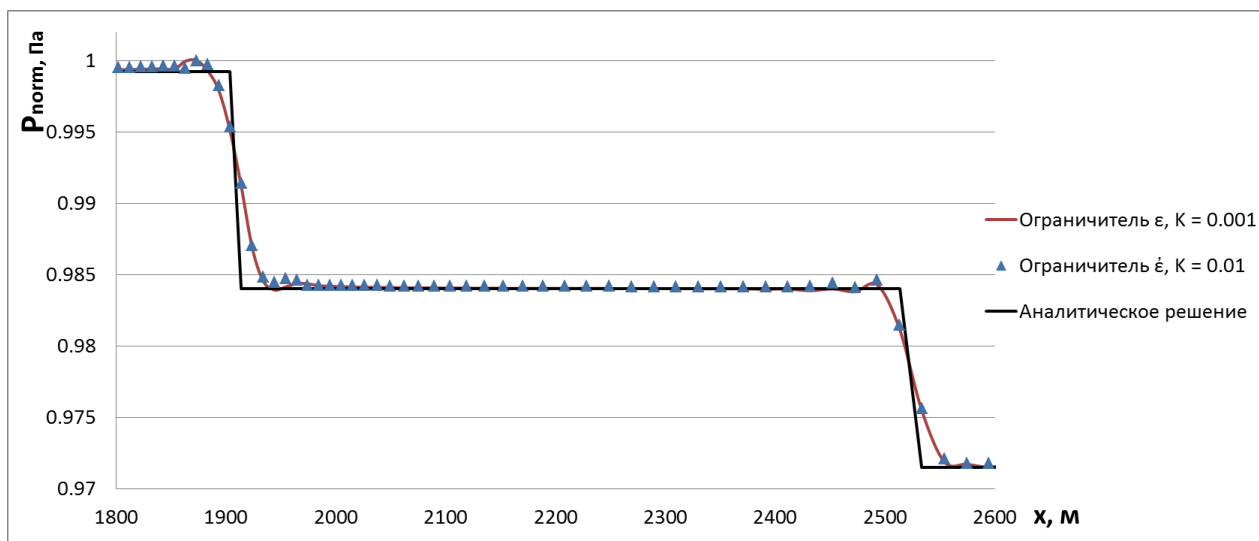


Рисунок 1.3.5– График распределения полного давления

Так же в этом случае область активация функции ограничителя характеризуется отсутствием случайных срабатываний (рисунок 1.3.6).

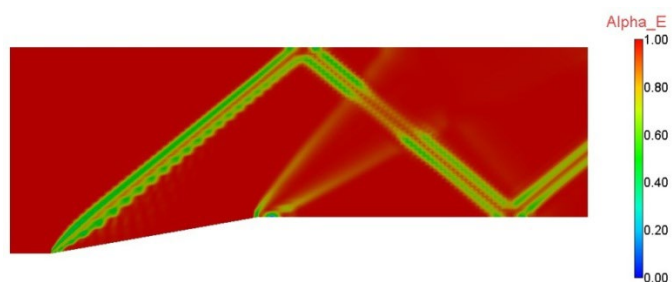


Рисунок 1.3.6– Область активации функции ограничителя (1.3.5) при $K=0.01$

В целях исследования применимости на неструктурированных сетках для данной геометрии были построены трехмерные сетки (в одну ячейку толщиной) на основе многогранников, тетраэдров и усеченных шестигранников. Поведение рассматриваемых функций ограничителя показано на рисунке. Отметим, что в случае ограничителя (1.3.1) при $K=0.001$ на всех вариантах сеточных моделей наблюдается многочисленные области случайных срабатываний (рисунок 1.3.7).

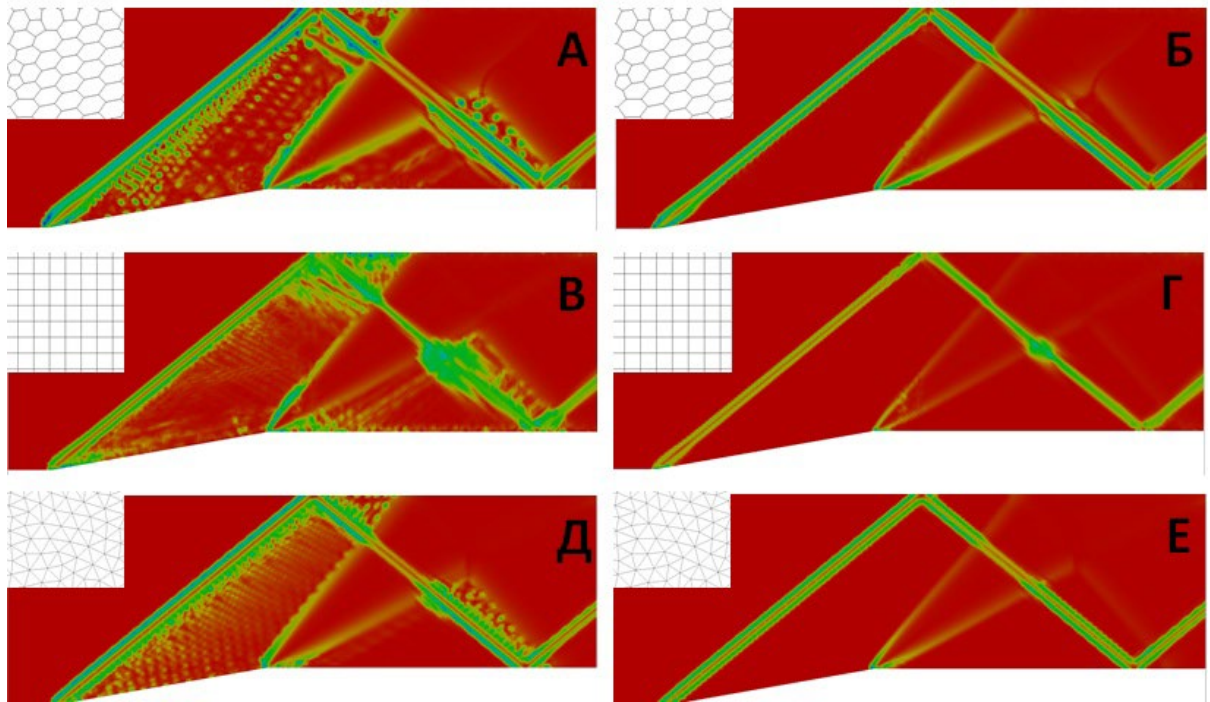


Рисунок 1.3.7 – Область активации функции ограничителя: а, в, д – ограничитель (1.3.1) при $K=0.001$; б, г, е – ограничитель (1.3.5) при $K=0.01$

Таким образом, на основании проведенного исследования влияния величины \mathcal{E} на поведение решения, можно сделать вывод, что применение ограничителя Venkatakrishnan, в котором \mathcal{E} вычисляется по выражению (1.3.3) при $K=0.001$ способствует монотонности процесса сходимости решения и уменьшает величину нефизичных осцилляций, но при этом \mathcal{E} имеет зависимость от геометрических размеров ячейки расчетной сетки. Это является причиной возможного случайного характера активации рассматриваемой функции (проявляющееся на неструктурированных сетках), что может вносить численную погрешность в решение. Для исключения данной проблемы был предложен вариант (1.3.5) при $K=0.01$, который имеет сопоставимые свойства монотонности, но при этом характеризуется отсутствием случайного характера активации функции ограничителя на произвольных неструктурированных сетках, что показано на примере выше. Кроме того форма (1.3.5) обеспечивает зависимость величины \mathcal{E} от интенсивности потока, тем самым позволяя более точно определить порог срабатывания функции ограничителя.

Рассмотрим влияние ограничителя на точность получаемого решения, на примере трансзвукового обтекания аэродинамического профиля NASA0012 [Колесников и др., 1993; Пилипенко и др., 2012; Чжен, 1973]. Сеточная область строится толщиной в одну ячейку на неструктурированной сетке из усеченных шестигранников (рисунок 1.3.8) с общим числом элементов ~ 731 тыс.

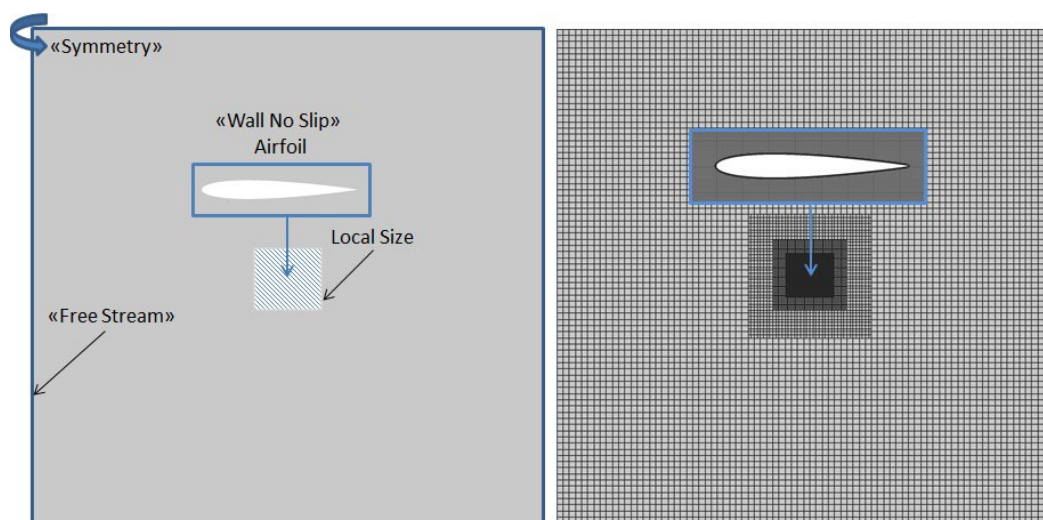


Рисунок 1.3.8 – Общий вид расчетной области (слева), расчетная сетка (справа)

Точность вычисления сопротивления давления напрямую зависит от уровня так называемой «численной» вязкости – ошибок аппроксимации, которые «работают» как дополнительная диссипация, приводящая к потерям полного давления в потоке и росту сопротивления исследуемого объекта. Она может быть вызвана некоторыми особенностями численного метода, такими, например, как, выбор ограничителя газодинамических величин, который может слишком сильно снижать порядок точности схемы в областях с большими градиентами параметров газа. В результате неправильной работы ограничителя может наблюдаться недобор разрежения в области минимальных значений коэффициента давления на верхней поверхности профиля.

Рассмотрим задачу со следующими граничными условиями. Параметры набегающего потока на внешней границе расчетной области соответствуют величинам: давление 46066.2 Па, температура 248° К, число Маха 0.7, угол атаки 1.489° и 3.046° [Колесников и др., 1993; Пилипенко и др., 2012; Повх, 1976]. Поверхность профиля считается непроницаемой стенкой, на боковых границах задано симметричное граничное условие.

При заданных параметрах обтекания профиля происходит формирование отрывной зоны на подветренной его стороне. У поверхности профиля формируется криволинейная ударная волна, соответствующая прямому скачку, переводящему сверхзвуковое течение в дозвуковое течение. В случае угла атаки 1.489° формируется скачок малой интенсивности с размытыми границами перехода сверхзвукового течения в дозвуковое течение (рисунок 1.3.9).

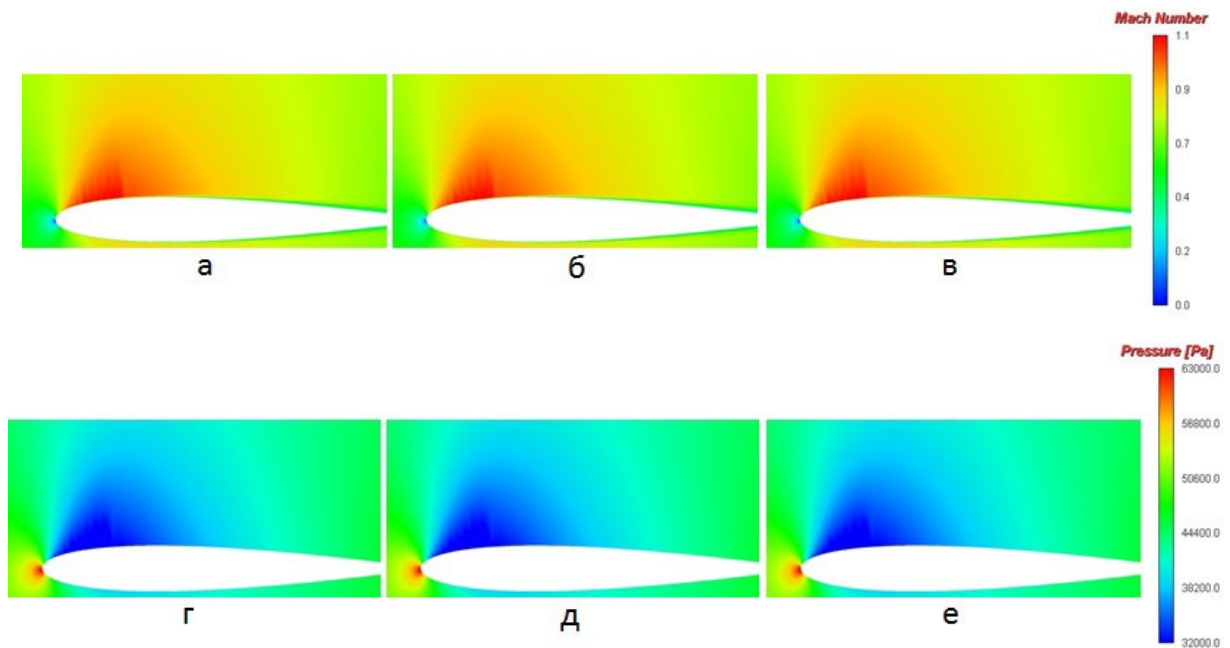


Рисунок 1.3.9 – Поле числа Маха и давления, $\alpha=1.489^\circ$ (а, г - расчет без функции ограничителя, б, д - расчет с функцией ограничителя, при $K=0.001$ для (1.3.3), в, е - расчет с функцией ограничителя, при $K=0.01$ для (1.3.5))

При увеличении угла атаки до значения 3.046° над профилем поднимается более интенсивный скачок, имеющий ярко-выраженный фронт и создающий обширную область пониженного давления (рисунок 1.3.10).

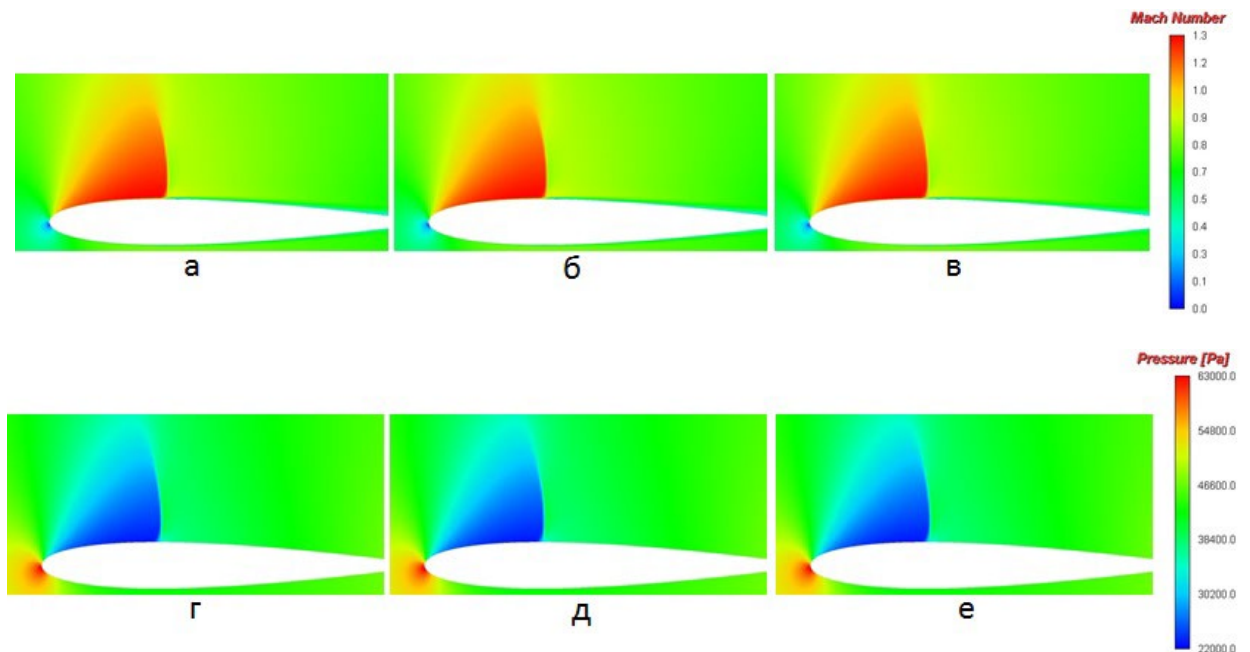


Рисунок 1.3.10 – Поле числа Маха и давления, $\alpha=3.046^\circ$ (а, г - расчет без функции ограничителя, б, д - расчет с функцией ограничителя, при $K=0.001$ для (1.3.3), в, е - расчет с функцией ограничителя, при $K=0.01$ для (1.3.5))

В общей структуре потока (в формировании ударной волны над профилем) визуальных отличий в решениях с разными вариантами функции ограничителя не

наблюдается – все поля соответствуют друг другу. Однако, отличия в решении можно увидеть если оценить интегральную характеристику, например величину коэффициента силы лобового сопротивления (C_{xa}) в сравнении с экспериментальными данными [Колесников и др., 1993; Пилипенко и др., 2012; Повх, 1976] (таблица 1.3.1).

Таблица 1.3.1. Значение C_{xa}

№	Вариант расчета	C_{xa} (1.489°)	ΔC_{xa} , % (1.489°)	C_{xa} (3.046°)	ΔC_{xa} , % (3.046°)
0	Эксперимент	0.00819	–	0.01267	–
1	Без ограничителя	0.00848	3.6	0.01423	12.3
2	ϵ (1.3.3) при $K=0.001$	0.00850	3.7	0.01425	12.5
3	$\dot{\epsilon}$ (1.3.5) при $K=0.01$	0.00838	2.3	0.01382	9.1

Максимальная погрешность в решении для обоих углов атаки получена в случае расчета №2. Основной вклад в ошибку расчета сопротивления дает компонента силы давления, которая получается завышенной более чем на 10%. Одной из вероятных причин таких результатов может быть «работа» ограничителя, имеющая случайный характер срабатывания во всей расчетной области, проявившейся на данной сеточной модели (рисунок 1.3.10).

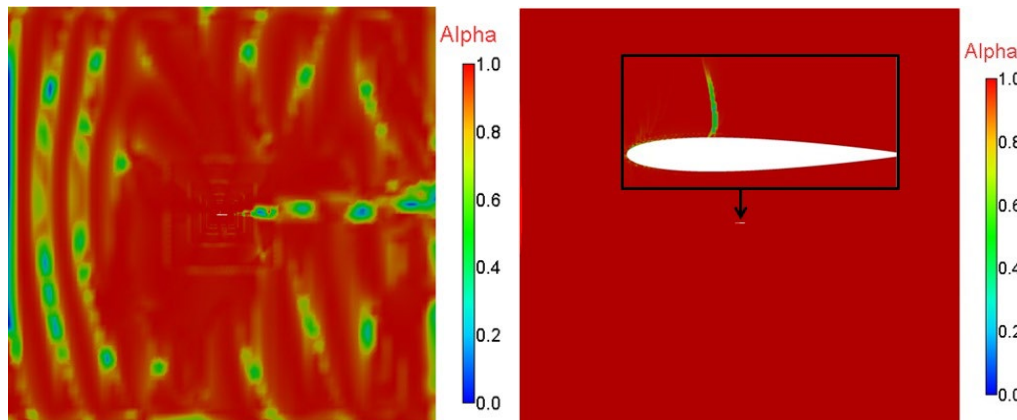


Рисунок 1.3.10 – Область включения функции ограничителя (ϵ (1.3.3) при $K=0.001$ – слева, $\dot{\epsilon}$ (1.3.5) при $K=0.01$ – справа)

Что касается варианта расчета №3, то здесь функция ограничителя была активна лишь в области фронта ударной волны над профилем (рисунок), что полностью справедливо для формы $\dot{\epsilon}$ (1.3.5), имеющей зависимость от параметров течения.

В результате было получено решение, имеющее минимальное отклонение от экспериментальных данных (2.3% и 9.1%). Следует заметить, что погрешность в вычислении увеличивается с возрастанием угла атаки и с его приближением к критическим значениям. Это связано с образованием более интенсивной ударной волны

над поверхностью профиля и более сложной работой в данной области функции ограничителя, а именно – максимально точно снижать порядок точности схемы в областях с большими градиентами параметров газа. На данной задаче наглядно продемонстрировано преимущество применения модифицированной функции ограничителя в сочетании с параметром ϵ при $K=0.01$. Дальнейшие задачи, представленные в данной работе, так же будут рассматриваться с этим вариантом записи функции ограничителя.

1.4 Модификация метода расчета градиентов

Для повышения точности проводится реконструкция решения на гранях ячейки через их значения в центре (см., формула (1) стр. 19). Реконструкция на неструктурированных сетках, как правило, основывается на использовании первых двух членов разложения искомым функций в ряд Тейлора. Второй член разложения содержит градиент искомой величины, который напрямую влияет на точность вычисления потоков через грань и, соответственно, на точность всей схемы в целом. Точность вычисления градиентов в центре ячеек является одной из главных характеристик численного метода.

В большинстве методик, основанных на методе контрольного объема, для вычисления градиента используется интерполяционный алгоритм Грина-Гаусса и метод наименьших квадратов. [Ferziger&Peric, 2002; Blazek 2001; Barth, 1991; Куликовский и др., 2001].

Согласно [Blazek, 2001] градиент в центре контрольного объема $\nabla \varphi_P$ можно вычислить по известному интерполяционному методу Грина-Гаусса:

$$\nabla \varphi_P = \frac{1}{V_P} \sum_{f \in \text{face}(P)} \varphi_f S_f, \quad (1.4.1)$$

где φ_f – значение величины на грани, S_f – площадь грани.

В этой формуле используется значение сеточной функции не в центрах контрольных объемов, а в центрах граней, образующих данный объем. Для получения значения величин в центре смежных граней соседних ячеек используются различные способы интерполяции по значениям в центрах соседних ячеек:

1. Среднее арифметическое

$$\varphi_f = \frac{1}{2}(\varphi_P + \varphi_E) \quad (1.4.2)$$

2. Линейная интерполяция по длине кривой

$$\varphi_f = \lambda \varphi_P + (1 - \lambda) \varphi_E \quad (1.4.3)$$

где $\lambda = \frac{|R_{EP}|}{|R_{Pf}| + |R_{Ef}|}$ – интерполяционный фактор, $\overrightarrow{R_{EP}}, \overrightarrow{R_{Pf}}, \overrightarrow{R_{Ef}}$ – радиус-векторы центров

ячеек P и E и геометрического центра грани f , разделяющей эти контрольные объемы.

Другим подходом к вычислению градиента является использование метода наименьших квадратов (МНК) [Barth, 1991, 1992].

В этом методе для определения градиента величины φ_P рассматривается все соседние по граням ячейки. Расстояние от центра рассматриваемой ячейки E до центров соседних ячеек P обозначим через $\Delta \vec{R}_{EP}$:

$$\Delta \vec{R}_{EP} = \vec{R}_P - \vec{R}_E = (x_P - x_E) \vec{i} + (y_P - y_E) \vec{j} + (z_P - z_E) \vec{k} = \Delta x_f \vec{i} + \Delta y_f \vec{j} + \Delta z_f \vec{k}. \quad (1.4.4)$$

Определим также приращение решения на грани f : $\Delta \varphi_f = \varphi_E - \varphi_P$. Если грань внешняя, то определяется расстояние от центра рассматриваемой ячейки E до центра грани f как $\Delta \vec{R}_{Ef}$:

$$\Delta \vec{R}_{Ef} = \vec{R}_f - \vec{R}_E = (x_f - x_E) \vec{i} + (y_f - y_E) \vec{j} + (z_f - z_E) \vec{k} = \Delta x_f \vec{i} + \Delta y_f \vec{j} + \Delta z_f \vec{k}, \quad (1.4.5)$$

Тогда компоненты вектора градиента

$$(\text{grad } \varphi)_E = \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_E, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_E, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_E \right\} = (A, B, C)_E \text{ определяются из решения следующей}$$

системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A \sum_{f=1}^F (\Delta x_f)^2 + B \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta y_f + C \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta z_f = \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta \varphi_f, \\ A \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta y_f + B \sum_{f=1}^F (\Delta y_f)^2 + C \sum_{f=1}^F \Delta y_f \Delta z_f = \sum_{f=1}^F \Delta y_f \Delta \varphi_f, \\ A \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta z_f + B \sum_{f=1}^F \Delta y_f \Delta z_f + C \sum_{f=1}^F (\Delta z_f)^2 = \sum_{f=1}^F \Delta z_f \Delta \varphi_f. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Эти уравнения в матричном виде запишутся так:

$$(\text{grad } \varphi)_E = [D]^{-1} (B), \text{ где матрица } [D] \text{ и вектор } (B) \text{ определяются как:}$$

$$[D_{ij}] = \begin{pmatrix} \sum_{f=1}^F (\Delta x_f)^2 & \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta y_f & \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta z_f \\ \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta y_f & \sum_{f=1}^F (\Delta y_f)^2 & \sum_{f=1}^F \Delta y_f \Delta z_f \\ \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta z_f & \sum_{f=1}^F \Delta y_f \Delta z_f & \sum_{f=1}^F (\Delta z_f)^2 \end{pmatrix}, \quad \{B_j\} = \begin{pmatrix} \sum_{f=1}^F \Delta x_f \Delta \varphi_f \\ \sum_{f=1}^F \Delta y_f \Delta \varphi_f \\ \sum_{f=1}^F \Delta z_f \Delta \varphi_f \end{pmatrix}. \quad (1.4.7)$$

Путем введения дополнительного веса грани ω_f , на который умножается матрица $[D]$, можно получать различные типы реконструкции. Обычно, используются следующие веса:

$$1) \omega_f^2 = 1 - \text{невзвешенный вариант}; \quad (1.4.8)$$

$$2) \omega_f^2 = \frac{1}{|\Delta \bar{R}_{Ef}|}; \quad (1.4.9)$$

$$3) \omega_f^2 = \frac{1}{|\Delta \bar{R}_{Ef}|^2}; \quad (1.4.10)$$

$$4) \omega_f^2 = \frac{\lambda |S_f|}{V_p |\Delta \bar{R}_{Ef}|}. \quad (1.4.11)$$

Метод, основанный на теореме Грина-Гаусса и метод наименьших квадратов, позволяют вычислить градиент в нужной точке локально, без увеличения общего числа неизвестных в задаче.

Точность вычисления градиента величины на сетках различного типа, представленными выше методами, можно оценить с помощью использования функционального распределения величин в областях с различными геометрическими конфигурациями. Исследуем точность вычисления градиентов на различных сетках в прямоугольном параллелепипеде, около пластины конечной ширины и в области, содержащей аэродинамический профиль (рисунок. 1.4.1).



Рисунок 1.4.1 – Геометрии и сетки рассматриваемых случаев

В качестве функции, для которой будет вычисляться градиент, рассмотрим функциональные зависимости с известными аналитически-точными значениями градиента: линейное и квадратичное распределение.

$$1. \text{ Линейное распределение: } \varphi(x, y, z) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) + d. \quad (1.4.12)$$

$$\text{Градиент функции равен: } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = c. \quad (1.4.13)$$

2. Квадратичное распределение:

$$\varphi(x, y, z) = a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + c(z - z_0)^2 + d(x - x_0)(y - y_0) + e(x - x_0)(z - z_0) + f(y - y_0)(z - z_0) + g(x - x_0) + h(y - y_0) + i(z - z_0) + j \quad (1.4.14)$$

Градиент функции равен:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2a(x-x_0) + d(y-y_0) + e(z-z_0) + g, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 2b(y-y_0) + d(x-x_0) + f(z-z_0) + h, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 2c(z-z_0) + e(x-x_0) + f(y-y_0) + i.\end{aligned}\tag{1.4.15}$$

При оценке точности численного вычисления градиента проводилась локальная и интегральная оценка погрешности вычисления. Локальная оценка погрешности в ячейке i проводилась по следующим формулам [Blazek, 2001]:

$$1. \text{ Отклонение по длине, в \%: } \delta_i = \frac{\left| \overline{R}_\tau - \overline{R} \right|}{\left| \overline{R}_\tau \right|} * 100\%;\tag{1.4.16}$$

$$2. \text{ Отклонение по углу, в \%: } \varphi_i = \arccos \left(\frac{\left(\overline{R}_\tau \cdot \overline{R} \right)}{\left| \overline{R}_\tau \right| \cdot \left| \overline{R} \right|} \right) * 100\%;\tag{1.4.17}$$

Здесь \overline{R} – приближенное значение градиента, \overline{R}_τ – точное значение градиента. Для точек, в которых точное и приближенное значение градиента близки к нулевым ($\left| \overline{R}_\tau \right| < 10^{-8}$ и $\left| \overline{R} \right| < 10^{-8}$), чтобы избежать деления на ноль, значения отклонений полагались равными нулю.

$$\delta_{min} = \min_i \left(\frac{\left| \overline{R}_\tau - \overline{R} \right|}{\left| \overline{R}_\tau \right|} * 100\% \right);\tag{1.4.18}$$

$$\delta_{max} = \max_i \left(\frac{\left| \overline{R}_\tau - \overline{R} \right|}{\left| \overline{R}_\tau \right|} * 100\% \right);\tag{1.4.19}$$

$$\varphi_{min} = \min_i \left(\arccos \left(\frac{\left(\overline{R}_\tau \cdot \overline{R} \right)}{\left| \overline{R}_\tau \right| \cdot \left| \overline{R} \right|} \right) * 100\% \right);\tag{1.4.20}$$

$$\varphi_{max} = \max_i \left(\arccos \left(\frac{\left(\overline{R}_\tau \cdot \overline{R} \right)}{\left| \overline{R}_\tau \right| \cdot \left| \overline{R} \right|} \right) * 100\% \right).\tag{1.4.21}$$

Расчеты во всех представленных ниже задачах выполнены с использованием следующих способов вычисления градиентов:

1. Метод Грина-Гаусса с использованием интерполяции (1.4.2) – обозначение в результатах как ГГ1;

2. Метод Грина-Гаусса с использованием интерполяции (1.4.3) – обозначение в результатах как ГГ2;
3. МНК с весом (1.4.8) – обозначение в результатах как МНК1;
4. МНК с весом (1.4.9) – обозначение в результатах как МНК2;
5. МНК с весом (1.4.10) – обозначение в результатах как МНК3;
6. МНК с весом (1.4.11) – обозначение в результатах как МНК4.

Для тестирования были выбраны наиболее часто встречающиеся в практических расчетах геометрии и сетки (структурированные и блочно-структурированные).

Для линейного распределения использовалось выражение:

$$\varphi(x, y, z) = 5x + 7y + 9z + 10. \quad (1.4.22)$$

Для квадратичного распределения использовалось выражение:

$$\varphi(x, y, z) = 5x^2 + 7y^2 + 9z^2 + 10xy - 0.2xz + 0.7yz + 5.5x + 7.3y + 8.1z. \quad (1.4.23)$$

Данные линейное и квадратичное распределения являются произвольными и никак не влияют на результаты исследования точности методов вычисления градиента. Их вид может быть выбран произвольно согласно формуле (1.4.12) и (1.4.14).

Результаты всех тестов для удобства сведены в таблицы. В таблицах используются следующие обозначения: δ_{min} – минимальное отклонение по длине (1.4.18), δ_{max} – максимальное отклонение по длине (1.4.19), φ_{min} – минимальное отклонение по углу (1.4.20), φ_{max} – максимальное отклонение по углу (1.4.21).

Тест №1 – Прямоугольный параллелепипед, равномерная сетка

Для начала рассмотрим наиболее простой случай – прямоугольный параллелепипед, покрытый равномерной кубической сеткой (рисунок 1.4.2). Распределения (1.4.22) – (1.4.23) на такой сетке показаны ниже на рисунке 1.4.3.

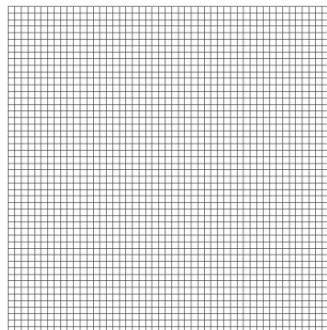


Рисунок 1.4.2 – Равномерная сетка

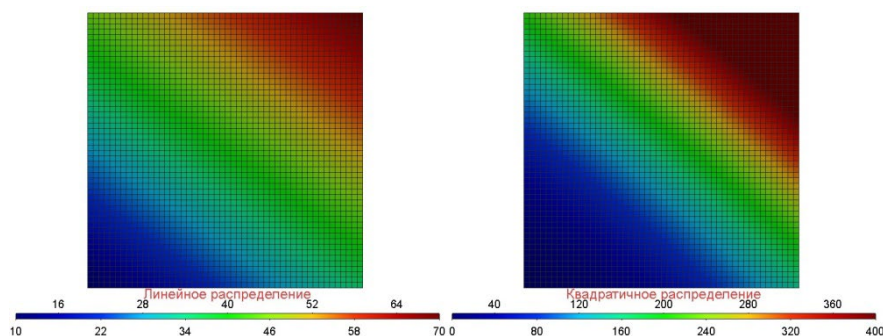


Рисунок 1.4.3 – Распределения линейное (слева) и квадратичное (справа)

Локальные отклонения градиентов, полученных различными методами и для различных функций, приведены в таблицах 1.4.1-1.4.2. Отметим, что в данной задаче все методы продемонстрировали достаточно хорошую точность (локальная погрешность менее 5%), что и было ожидаемо для данного типа расчетной сетки.

Таблица 1.4.1. Результат для линейного распределения

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	0.0	1.7143e-8	0.0	0.0
ГГ2	0.0	1.7143e-8	0.0	0.0
МНК1	0.0	3.2863e-11	0.0	0.0
МНК2	0.0	3.3576e-11	0.0	0.0
МНК3	0.0	2.6791e-11	0.0	0.0
МНК4	0.0	1.9771e-11	0.0	0.0

Таблица 1.4.2. Результат для квадратичного распределения

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	0.0	2.0083	0.0	1.88539
ГГ2	0.0	2.0083	0.0	1.88539
МНК1	0.0	2.8012	0.0	1.99088
МНК2	0.0	2.5167	0.0	1.85102
МНК3	0.0	2.0991	0.0	1.74852
МНК4	0.0	2.0817	0.0	1.73887

Тест №2 – Прямоугольный параллелепипед, сетка со сгущением

В задачах газодинамики необходимо учитывать процессы турбулентного перемешивания. Для решения таких задач обычно используются различные модели турбулентности, которые требуют построения сеток с пристеночными слоями. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, в котором построена структурированная сетка со сгущениями к стенкам (рисунок 1.4.4). Распределения (1.4.22) – (1.4.23) на такой сетке показаны ниже на рисунке 1.4.5.

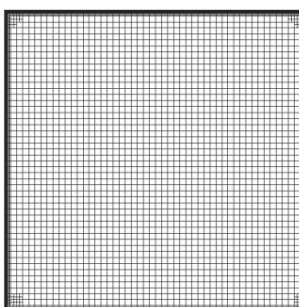


Рисунок 1.4.4 – Равномерная сетка с пристеночными слоями

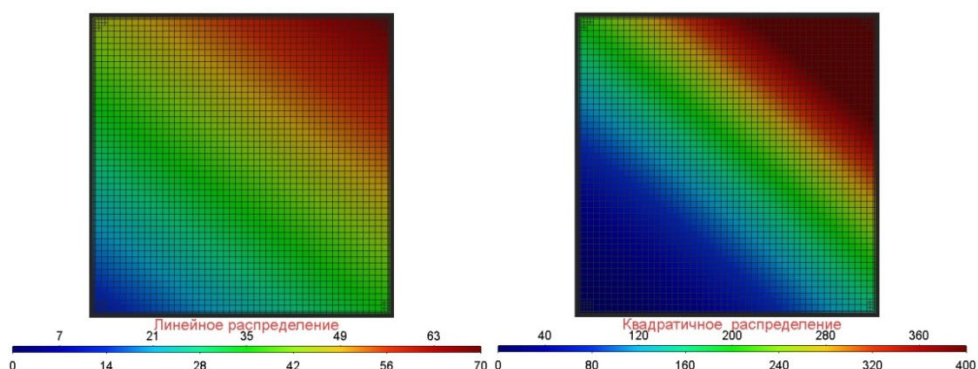


Рисунок 1.4.5 – Распределения линейное (слева) и квадратичное (справа)

Локальные отклонения, полученные при вычислении градиента различными методами для распределений (1.4.22-1.4.22), приведены в таблицах 1.4.3-1.4.4. Точность используемых методов достаточна для решения практических задач, а максимальное значение локальной погрешности в случае квадратичного распределения составляет около 3% от аналитического решения.

Таблица 1.4.3. Результат для линейного распределения

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	0.0	0.87102	0.0	0.7496
ГГ2	0.0	0.02194	0.0	0.00861
МНК1	0.0	2.7281e-07	0.0	0.0
МНК2	0.0	2.7114e-07	0.0	0.0
МНК3	0.0	4.6211e-08	0.0	0.0
МНК4	0.0	3.9745e-08	0.0	0.0

Таблица 1.4.4. Результат для квадратичного распределения (1.4.23)

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	0.0	2.1362	0.0	1.8612
ГГ2	0.0	2.0619	0.0	1.2312
МНК1	0.0	3.2186	0.0	3.1742
МНК2	0.0	2.7133	0.0	3.0011
МНК3	0.0	2.3244	0.0	2.1291
МНК4	0.0	2.2001	0.0	1.9901

На рисунке 1.4.6. показана ячейка, в которой было вычислено значение градиента с максимальной величиной погрешности.



Рисунок 1.4.6 – Ячейка, с максимальным значением погрешности вычисления градиента

Из представленного рисунка видно, что максимальная погрешность для квадратичного распределения получена в самой тонкой ячейке, то есть в ячейке, с максимальным значением отношения сторон (аспекта). Данная ячейка находится около стенки (в области пограничного слоя) и неверная величина градиента внесет погрешность, например, в расчет скорости течения, что может повлиять на распределение турбулентной вязкости.

На основе таблицы (1.4.4) справедливо сделать вывод, что метод Грина-Гаусса на ячейках с большой величиной аспекта обеспечивает более высокую точность.

Тест №3 – Плоская пластина

Рассмотрим геометрию задачи для моделирования течения вдоль поверхности плоской пластины с закруглением в носовой части (рисунок 1.4.7). Такая геометрия, как правило, используется для тестирования и верификации моделей турбулентности.

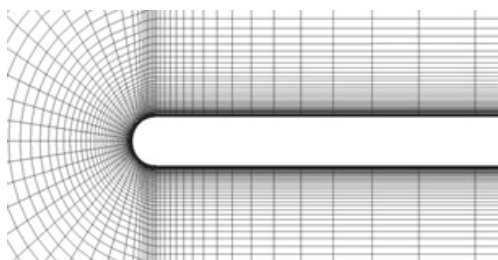


Рисунок 1.4.7 – Блочнo-структурированная сетка с пристеночными слоями

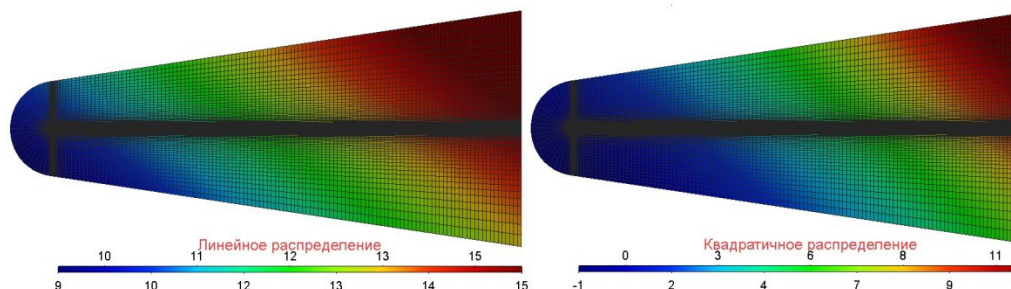


Рисунок 1.4.8 – Распределения линейное (слева) и квадратичное (справа)

Локальные отклонения значений градиента, полученных различными методами и для различных функций, приведены в таблицах 1.4.5-1.4.6.

Таблица 1.4.5. Результат для линейного распределения

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	0.0	6.7565e-02	0.0	8.1243e-02
ГГ2	0.0	6.7538e-02	0.0	5.1325e-02
МНК1	0.0	6.981	7.4534e-01	4.1073
МНК2	0.0	6.102	7.5587e-01	4.1002
МНК3	0.0	4.275	6.4534e-01	1.5051
МНК4	0.0	3.943	5.1587e-01	1.1002

Таблица 1.4.6. Результат для квадратичного распределения

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	1.1487e-07	0.28678	0.0	0.29713
ГГ2	1.1481e-07	0.25411	0.0	0.29006
МНК1	1.8565e-08	8.7511	2.0808e-05	8.63162
МНК2	1.0081e-08	8.1109	2.0649e-05	8.62983
МНК3	7.5791e-09	6.1629	1.9149e-05	6.08911
МНК4	4.7041e-09	5.8808	1.9009e-05	5.92171

Для данной задачи все методы показали хорошую интегральную точность определения градиента. Отметим, что максимальная локальная погрешность (8.7%) возникает у МНК для ячейки с наибольшим для данной сетки отношением сторон (величиной аспекта) (рисунок 1.4.9).



Рисунок 1.4.9 – Ячейка, с максимальным значением погрешности вычисления градиента

По представленным результатам имеем, что метод Грина-Гаусса на ячейках с большой величиной аспекта обеспечивает более высокую точность.

Тест №4 – Профиль NASA0012

Рассмотрим геометрию задачи для моделирования обтекания профиля NASA0012, для которой построена неструктурированная расчетная сетка (рисунок 1.4.10).

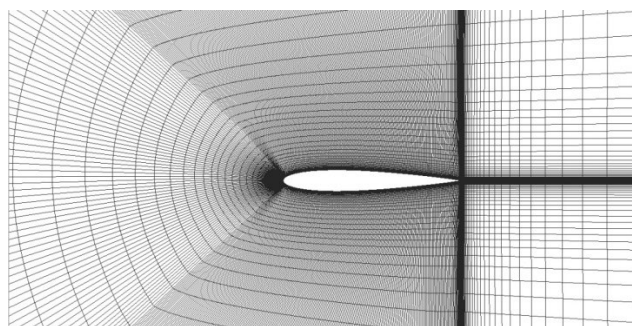


Рисунок 1.4.10 – Блочнo-структурированная сетка с пограничными слоями

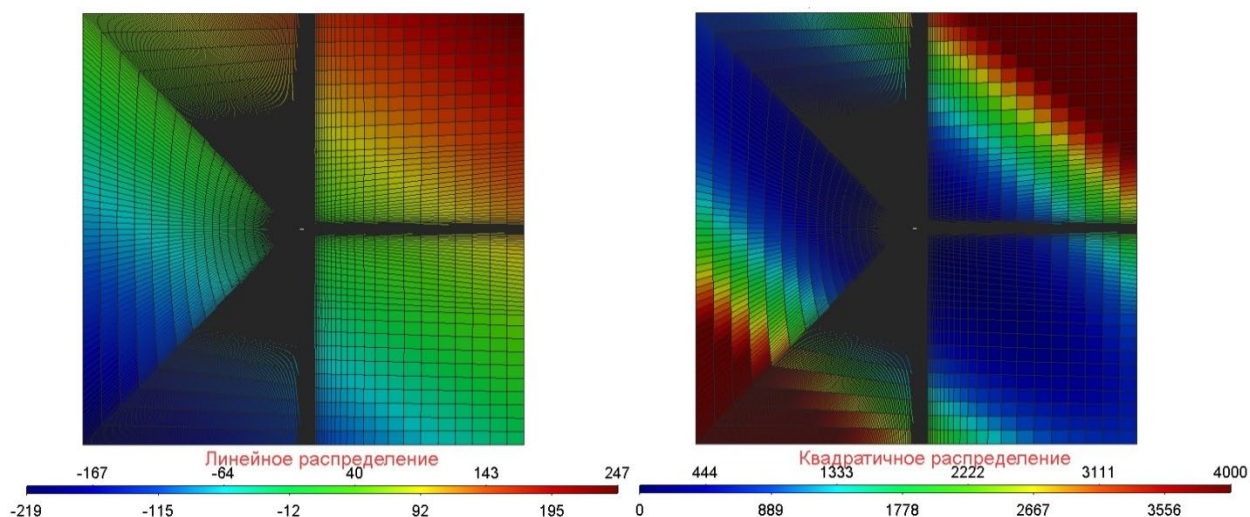


Рисунок 1.4.11 – Распределения линейное (слева) и квадратичное (справа)

Локальные и интегральные отклонения градиентов, полученных различными методами и для различных функций, приведены в таблицах 1.4.7-1.4.8.

Таблица 1.4.7. Результат для линейного распределения

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	3.8719e-08	9.0108	0.0	9.5442
ГГ2	3.8651e-08	8.9846	0.0	7.4379
МНК1	1.5431e-08	6.1149	0.0	6.1073
МНК2	1.9827e-08	5.9673	0.0	6.0041
МНК3	7.6854e-09	4.2375	0.0	4.9981
МНК4	4.9981e-09	4.0028	0.0	4.9752

Таблица 1.4.8. Результат для квадратичного распределения

Метод	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
ГГ1	1.4528e-06	9.3236	2.5506e-05	8.785
ГГ2	1.4112e-06	8.0167	2.5399e-05	7.149
МНК1	1.9893e-08	9.4032	0.0	9.116
МНК2	1.9703e-08	9.2505	0.0	5.082
МНК3	1.5682e-08	8.1865	0.0	4.411
МНК4	1.5198e-08	8.0041	0.0	4.209

Для линейного и квадратичного распределений МНК со всеми представленными выше весами показал максимальную локальную погрешность, которая характерна для ячеек с наибольшим для данной сетки отношением сторон (величиной аспекта) (рисунок 1.4.12).

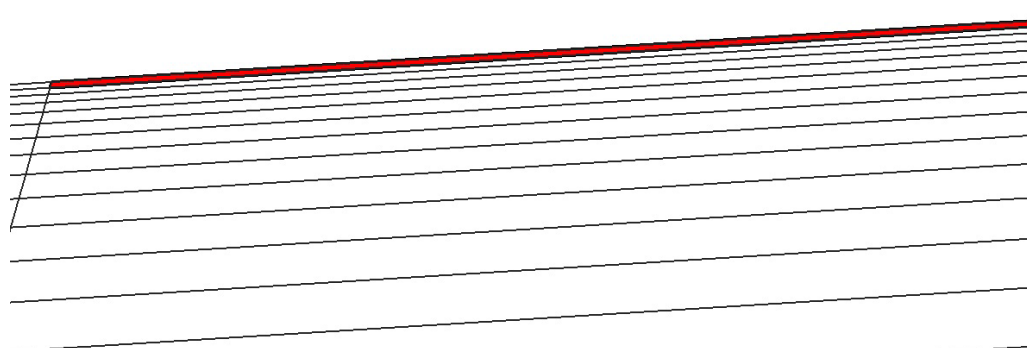


Рисунок 1.4.12 – Ячейка, с максимальным значением погрешности вычисления градиента МНК

Для квадратичного распределения метод Грина-Гаусса так же имеет локальную погрешность (9%), но результат немного улучшается в случае выбора изменения способа интерполяции. Однако все же погрешность для некоторых ячеек (характеризующихся скошенными гранями, рисунок 1.4.13) остается на уровне ~9%.

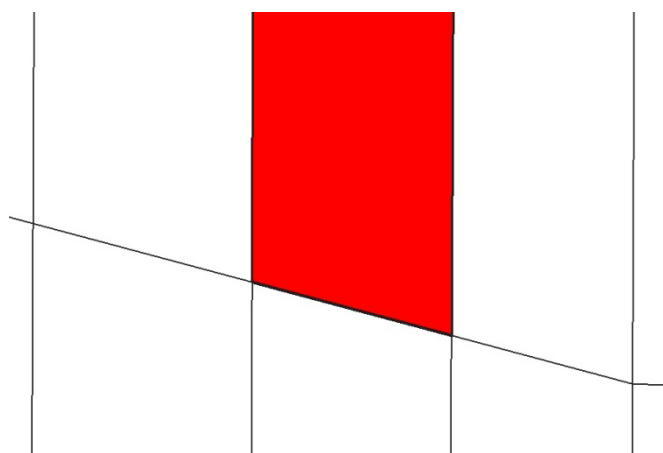


Рисунок 1.4.13 – Ячейка, с максимальным значением погрешности вычисления градиента методом Грина-Гаусса

Таким образом, на основе представленных результатов численного исследования сделаем вывод – оба метода могут иметь достаточную точность, показанной на тестовых расчетах. Однако в некоторых ячейках, даже на модельных (структурированных) сетках, может возникать существенная локальная погрешность, зависящая от геометрии расчетной ячейки. При определении градиента поля на очень сильно вытянутых ячейках МНК может внести дополнительную погрешность, а точность метода Грина-Гаусса сильно зависит от ортогональности граней ячейки.

Как уже отмечалось в начале данной работы, при рассмотрении промышленно-ориентированных задач сеточная модель строится автоматическим сеточным генератором. Поэтому для получения качественного решения необходимо адаптировать используемые численные методы под такой тип расчетной сетки. Известно, что сеточные генераторы вблизи криволинейной поверхности заполняют область сильно вытянутыми ячейками, для которых отношение сторон ($\Delta L_{\text{длина}} / \Delta L_{\text{ширина}}$) достигает значения 10^4 . В этом случае метод Грина-Гаусса и метод наименьших квадратов в описанном виде как было показано выше имеют существенную локальную погрешность. Ввиду этого на неструктурированных сетках с произвольными ячейками предлагается применить гибридный метод расчета градиентов, совмещающий в себе как свойства метода Грина-Гаусса, так и метода наименьших квадратов. Построение такого гибридного метода можно осуществить по аналогии с построением схемы расчета конвективных потоков, в которую добавляется доля противопоточности, определяемая параметрами течения [Вui, 1999; Strelets, 2001].

Согласно предложенному подходу, итоговое значение градиента в ячейке определим через сумму значений градиентов полученного по методам Грина-Гаусса и наименьших квадратов с соответствующими долями (1.4.24):

$$\nabla \varphi_P = \beta \nabla \varphi_P^{LSQ} + (1 - \beta) \nabla \varphi_P^{GG}, \quad (1.4.24)$$

где $\nabla \varphi_P^{LSQ}$ – значение градиента в ячейке P , вычисленное по методу наименьших квадратов, $\nabla \varphi_P^{GG}$ – значение градиента в ячейке P , вычисленное по методу Грина-Гаусса, β – фактор, определяющий долю каждого из значений градиентов.

Основная сложность в использовании гибридного метода расчета – это правильно выбрать величину β . Для получения качественного значения градиента на неструктурированной сетке параметр β должен иметь монотонный характер зависимости от геометрических параметров ячейки.

Факторами, имеющими значимое влияние на точность вычисления градиента, являются величины аспекта и кривизны ячейки. Под аспектом ячейки понимается соотношение максимальной и минимальной ее стороны. Как уже отмечалось – для неструктурированных ячеек этот параметр может достигать значения 10^4 . Следовательно, величина β должна зависеть от обоих этих параметров ячейки и обеспечивать плавный переход между двумя различными способами вычисления градиента. Значение β определим как суперпозицию величины веса отношения сторон ячейки (аспекта) и кривизны ячейки, согласно выражению:

$$\beta = \beta_{AspectCell} * \beta_{curv}, \quad (1.4.25)$$

где $\beta_{AspectCell}$ – вес, определяемый аспектом ячейки,

β_{curv} – вес, определяемый величиной кривизны ячейки.

Так как, отношение сторон ячейки (аспект), как правило, не превышает значения 10^4 , то для нормирования веса, определяемого аспектом ячейки, воспользуемся выражением:

$$\beta_{AspectCell} = 1 - (0.0001 * AspectCell), 0 \leq \beta_{AspectCell} \leq 1. \quad (1.4.26)$$

$$AspectCell = \min(100000, Aspect), \quad (1.4.27)$$

$$Aspect = \frac{F_{max}}{F_{min}}, \quad (1.4.28)$$

$$F_{max}(min) = |(\overline{RP} \cdot \vec{N})|, \quad (1.4.29)$$

где F_{max} и F_{min} – максимальное и минимальное значение по всем граням f ячейки P , $|(\overline{RP} \cdot \vec{N})|$ – модуль скалярного произведения векторов \overline{RP} и \vec{N} , \overline{RP} – вектор от центра ячейки P к центру грани f , \vec{N} – вектор нормали грани f .

Физический смысл в нахождении отношения сторон ячейки (аспекта) заключается в том, что для вырожденных ячеек (характеризующихся большим значением аспекта) градиент предпочтительнее находить методом наименьших квадратов с правильно подобранной весовой функцией. Чем больше вес величины аспекта ячейки, тем больший вклад имеет градиент, полученный методом наименьших квадратов.

Для расчета величины веса, определяемого кривизну ячейки, в предложенном гибридном методе предлагается использовать тригонометрическую функцию гиперболического тангенса: $\beta_{curv} = th(\alpha)$, где α – максимальный угол между нормалью грани и вектором, соединяющим центры соседних ячеек.

Вид функции, где за основу взят гиперболический тангенс, определяется из следующих требований:

- принимать в качестве аргумента значение величины угла;
- функция должны быть ограничена и принимать значения $0 \leq \beta_{curv} \leq 1$;
- удовлетворять свойствам монотонности.

Исходную тригонометрическую функцию гиперболического тангенса необходимо было «поместить» в необходимый интервал ($0 \leq \beta_{curv} \leq 1$) путем добавления единицы к ее значению и делению на 2. Так же для смещения по значению угла в интервал практически-значимых случаев (для угла между нормалью грани и вектором,

соединяющем центры соседних ячеек) выполняется операция умножения на константу и вычитания числа π в аргументе функции.

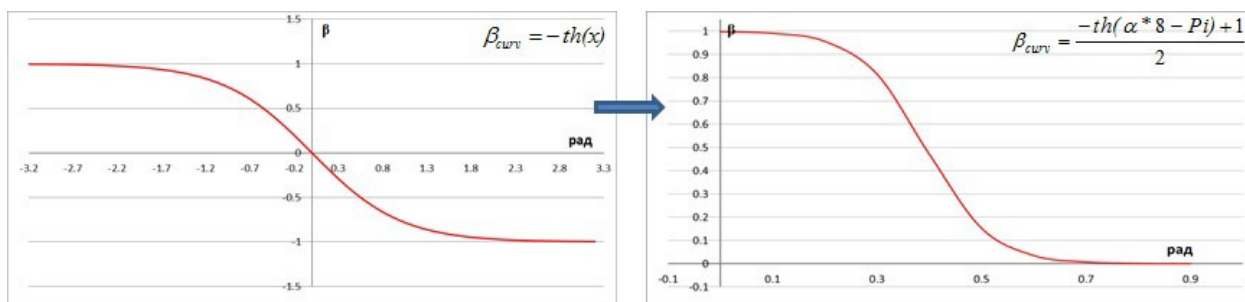


Рисунок 1.4.14 – График функции β_{curv}

Таким образом, для расчета величины веса, определяемого кривизну ячейки, используется следующее выражение:

$$\beta_{curv} = \frac{-th(\alpha * 8 - \pi) + 1}{2}, \quad (1.4.30)$$

где α – максимальный угол между нормалью грани и вектором, соединяющим центры соседних ячеек, π – число π равное 3,14.....

Физический смысл выражения в том, что бы на сильно «не плоских» ячейках получить для величины β_{curv} значение 0. На рисунке представлен график функции для веса β_{curv} , по которому видно, что при увеличении угла α (то есть кривизны ячейки), значение функции стремится к 0 и больший вклад в значение градиента имеет величина, рассчитанная по методу Грина-Гаусса. Примерно равные веса от кривизны ячейки имеют методы при граничном значении угла равном $\sim 20^\circ$.

Таким образом, итоговое значение весового множителя β для определения доли каждого из методов расчета градиента удовлетворяет условию геометрической монотонности и принимает значения $0 \leq \beta \leq 1$. Если $\beta = 1$, то градиент вычисляется по методу наименьших квадратов, если $\beta = 0$ – по методу Грина-Гаусса.

Данный подход позволяет объединить сильные стороны каждого из методов вычисления градиента и учитывать индивидуальные особенности расчетной ячейки, тем самым на вырожденных или сильноизогнутых ячейках получать более точное значение газодинамической переменной при интерполяции из центра ячеек на грань для повышения порядка точности.

На рассмотренных выше тестовых расчетах предложенный гибридный метод позволил получить результаты, характеризующиеся представленными в таблицах 1.4.9-1.4.10 локальными отклонениями.

Таблица 1.4.9. Линейное распределение

Сетка	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
Тест №1	0.0	3.989e-11	0.0	2.107e-06
Тест №2	0.0	1.0801	0.0	1.6895
Тест №3	2.1872e-11	1.2137	0.0	0.9429
Тест №4	7.5734e-11	3.9598	0.0	3.4532

Таблица 1.4.10. Квадратичное распределение

Сетка	$\delta_{min}, \%$	$\delta_{max}, \%$	$\varphi_{min}, \%$	$\varphi_{max}, \%$
Тест №1	0.0	2.413	0.0	0.949
Тест №2	0.0	1.212	0.0	1.536
Тест №3	2.6203e-08	1.194	3.6502e-06	1.622
Тест №4	2.9845e-07	6.234	4.214e-06	5.673

Отметим, что за счет применения гибридного способа вычисления градиентов, итоговое значение градиента стало существенно лучше, однако для тех ячеек, где «чистый» метод давал более точное значение – суммарное значение градиента по гибридной схеме может иметь несколько большую погрешность. Подобное занижение точности имеет локальный недостаток, но значительное снижение максимальной погрешности для точности и устойчивости общего решения задачи имеет более значимый эффект.

В таблице 1.4.11 показаны максимальные и минимальные значения веса, определяющего вклад каждого из методов при нахождении итогового значения градиента на рассмотренных тестовых расчетах.

Таблица 1.4.11. Параметры весовой функции

Сетка	$\beta_{AspectCell}$ min	$\beta_{AspectCell}$ max	β_{curv} min	β_{curv} max	β min	β max
Тест №1	1	1	0.9981	0.9981	0.9981	0.9981
Тест №2	0.9825	1	0.036	0.998	0.036	0.998
Тест №3	0.17	1	0.018	0.997	0.017	0.997
Тест №4	1.0e-08	1	0.0018	0.998	1.86e-09	0.998

Наглядно показано, что рассмотренные случаи охватывают всю область изменения параметра β (от 0 до 1), а это значит, что при вычислении градиента использовалась представленная гибридная схема, которая является более универсальной. Рассмотрим применение описанного метода при решении практических задач на неструктурированных сетках.

1.5 Применение модифицированных ограничителя потока и метода расчета градиентов для моделирования сверхзвуковых течений на неструктурированных сетках

Сверхзвуковое обтекание цилиндра с иглой

Цилиндр с иглой является составной частью геометрии снаряда [Чжен, 1973]. Коэффициент лобового сопротивления и запас устойчивости являются основными характеристиками снаряда при его полете к цели. В качестве примера рассмотрим объект со следующей геометрией (рисунок 1.5.1).

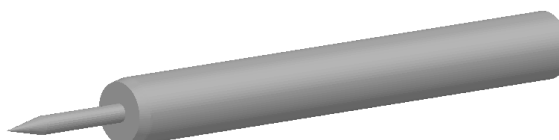


Рисунок 1.5.1 – Геометрия цилиндра

Согласно имеющимся экспериментальным данным [Чжен, 1973], игла, установленная перед цилиндром, уменьшает коэффициент лобового сопротивления. Следует отметить, что АДХ в этом случае будут зависеть как от отношения длины иглы к диаметру цилиндра, так и от числа Маха и Рейнольдса набегающего потока. Для сверхзвукового обтекания при наличии иглы образуется сложная конфигурация из ударных волн, взаимодействующих между собой. При этом уменьшение сопротивления основано на явлениях отрыва как для ламинарных, так и для турбулентных течений. При движении с углом атаки наличие иглы также способствует увеличению подъемной силы.

В данной задаче использованы два типа неструктурированных сеток – на основе тетраэдров и усеченных шестигранников. В целях подтверждения результатов сеточной сходимости для каждого типа элементов построены два варианта расчетной сетки, характеризующиеся разным размером ячейки в блоке локального измельчения. В остальной области (как в ядре сетке, так и в пограничном слое) – сетки оставались без изменения и соответствовали между собой. В рассматриваемых случаях толщина призматического слоя составляет 1 мм и 20 ячеек шириной, размер сетки на поверхности – 0,5 мм. Общая размерность используемых сеточных моделей приведена в таблице 1.5.1.

Таблица 1.5.1. Размерность расчетных моделей

Размер в блоке локального измельчения, мм	Размерность модели	
	Тетраэдр	Усеченный шестигранник
1,0	10,4 млн	4,9 млн
0,5	44,4 млн	17,3 млн

На рисунках (1.5.2–1.5.3) показаны фрагменты расчетных сеток наиболее подробных вариантов модели и общий вид расчетной области.

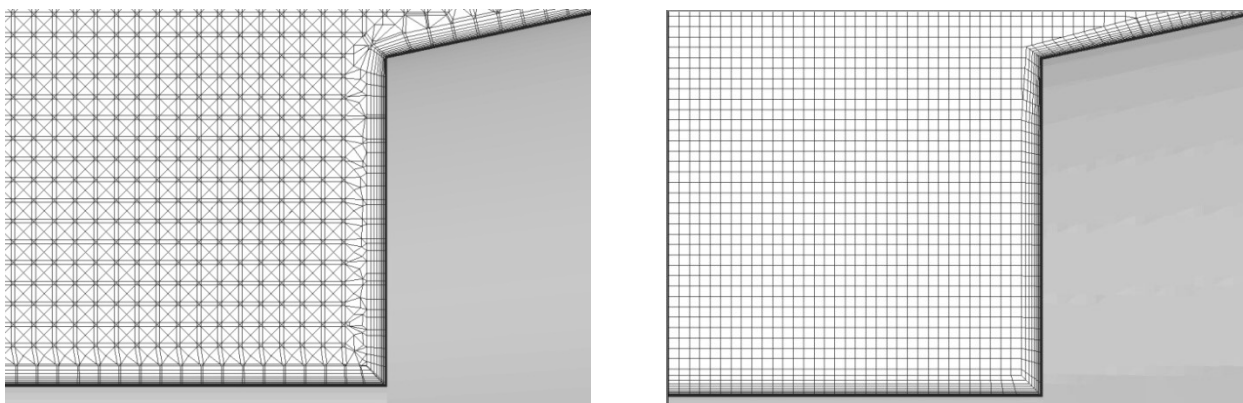


Рисунок 1.5.2 – Призматический слой вблизи места присоединения иглы и цилиндра

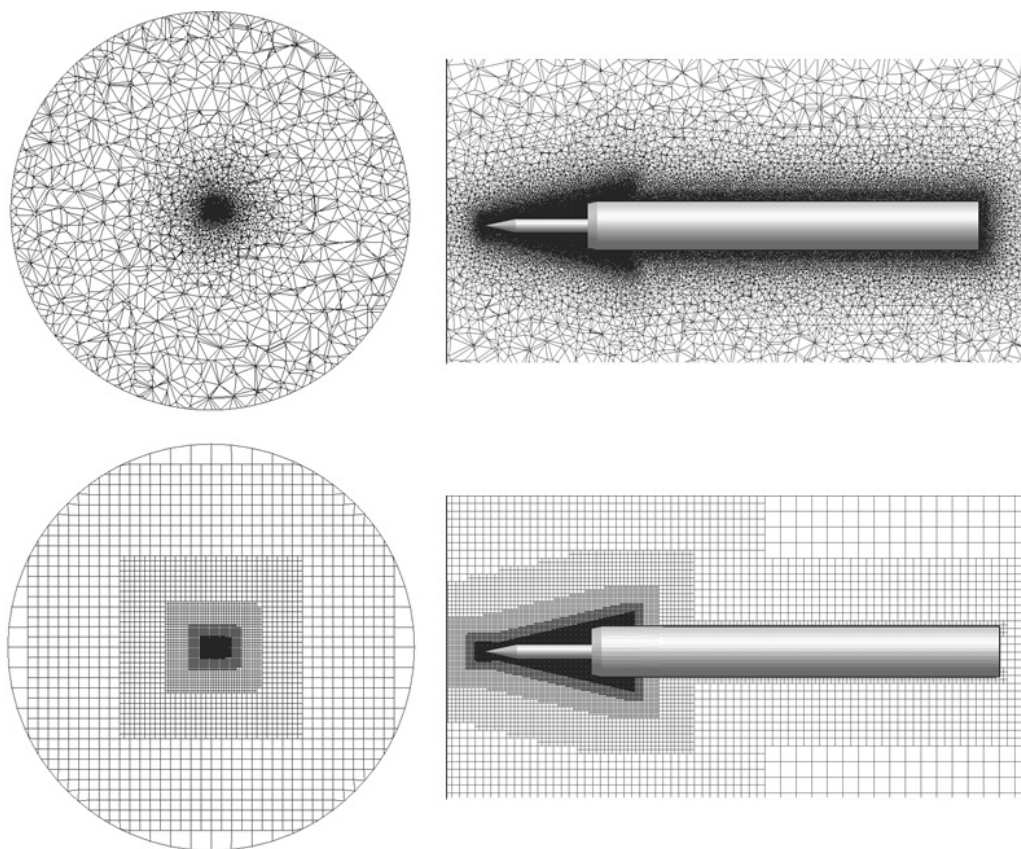


Рисунок 1.5.3 – Общий вид расчетной сетки

Для моделирования обтекания рассматривается задача со следующими граничными условиями. Параметры набегающего потока на внешней границе расчетной области соответствуют величинам: давление 28116 Па, температура 160° К, число Маха 2, угол атаки 0° [Чжен, 1973]. Поверхность тела считается непроницаемой стенкой.

При сверхзвуковых скоростях поток вблизи тела отрывается под действием вязкости и градиента давления за скачком уплотнения [Чжен, 1973] (рисунок 1.5.4). Форма

замкнутой области отрыва около поверхности иглы является в общем случае клиновидной с присоединением потока на поверхности тупого тела. Внутри области отрыва возникает циркуляционное течение. Область отрыва часто называют застойной зоной, однако этот термин не должен связываться с представлением о нулевом значении скорости внутри этой области. Если тело и игла осесимметричные, то область отрыва около иглы имеет в общем случае коническую форму. Когда течение является неустановившимся, форма скачка и аэродинамические характеристики в течение периода колебаний переменны, а характеристики потока можно изменить путем изменения длины и диаметра иглы.

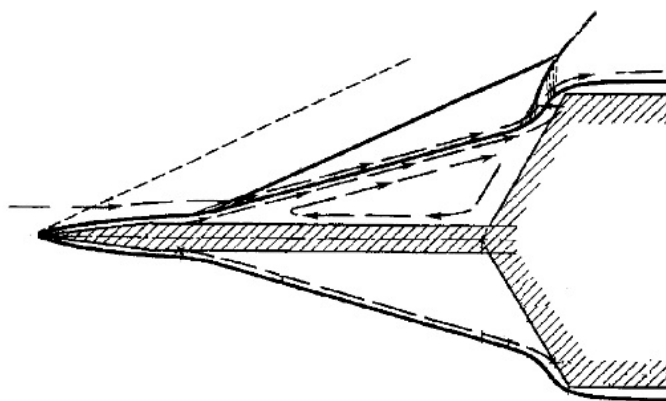


Рисунок 1.5.4 – Структура течения вблизи цилиндра с иглой

При визуальном анализе картины течения (в рамках одинаковых методов расчета градиентов, представленных в параграфе 1.4) – различий между сеточными моделями на основе одинаковых элементов нет. Поэтому в качестве полей газодинамических величин (давления, температуры, числа Маха), полученных в результате решения, приведем результаты на максимально подробной сеточной модели.

На рисунках (1.5.5–1.5.7) представлены сформировавшиеся поля течения вблизи объекта при расчете на сетке из тетраэдров.

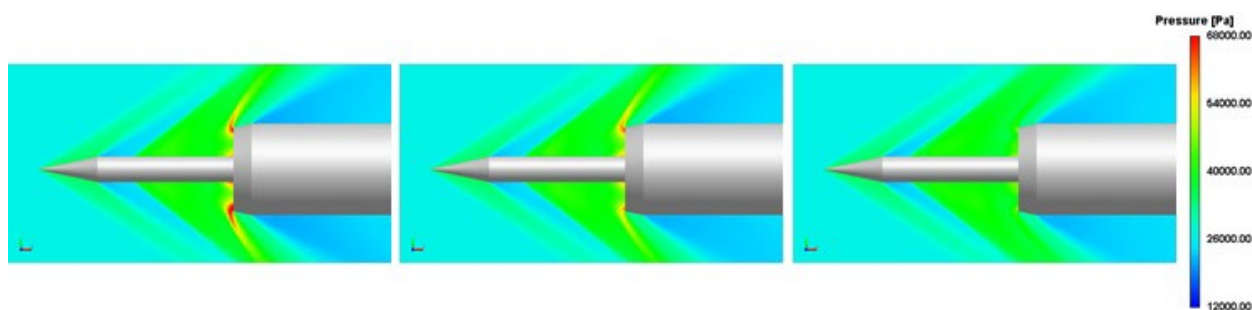


Рисунок 1.5.5 – Поле давления, (слева направо: метод Грина-Гаусса, гибридный метод, МНК)

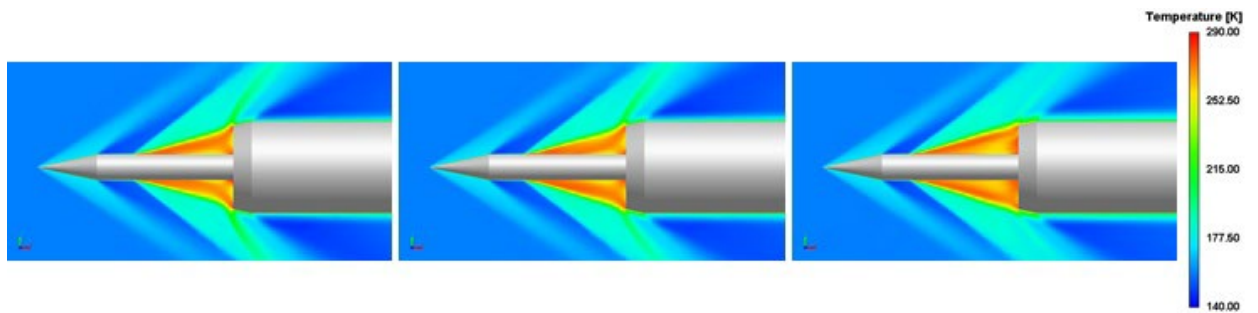


Рисунок 1.5.6 – Поле температуры, (слева направо: метод Грина-Гаусса, гибридный метод, МНК)

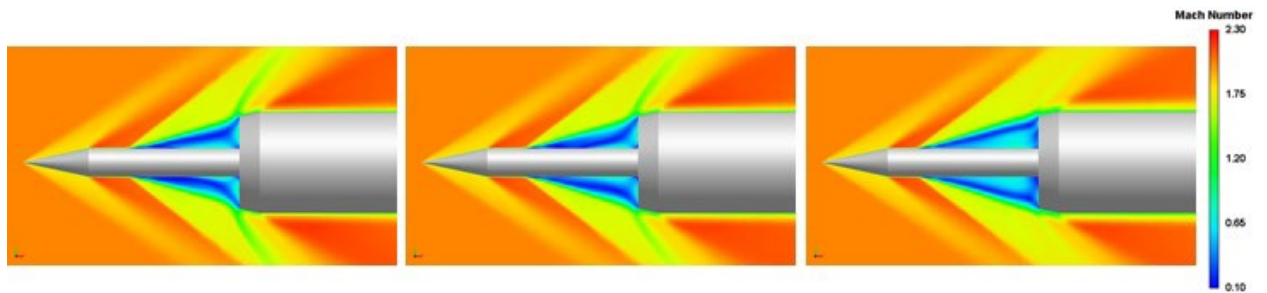


Рисунок 1.5.7 – Поле числа Маха, (слева направо: метод Грина-Гаусса, гибридный метод, МНК)

При различных вариантах вычисления градиентов на сетке из тетраэдров в области отрыва потока наблюдаются заметные отличия. Так в случае МНК можно наблюдать более широкую застойную зону и более высокую точку присоединения потока, а в случае Грина-Гаусса наблюдается повышение давления на переднюю часть цилиндра. Область отличия в данном случае является наиболее важным участком обтекания объекта и точность описания структуры потока существенно влияет на результат расчета в целом.

В случае расчета на сетке из усеченных шестигранников между результатами наблюдается визуальное соответствие. Здесь нет наглядной зависимости в распределении полей от используемого метода расчета градиентов, в отличие от предыдущего случая. Все полученные картины течения имеют одинаковые структуры и форму распределения газодинамических параметров (ширина застойной зоны, точка присоединения потока).

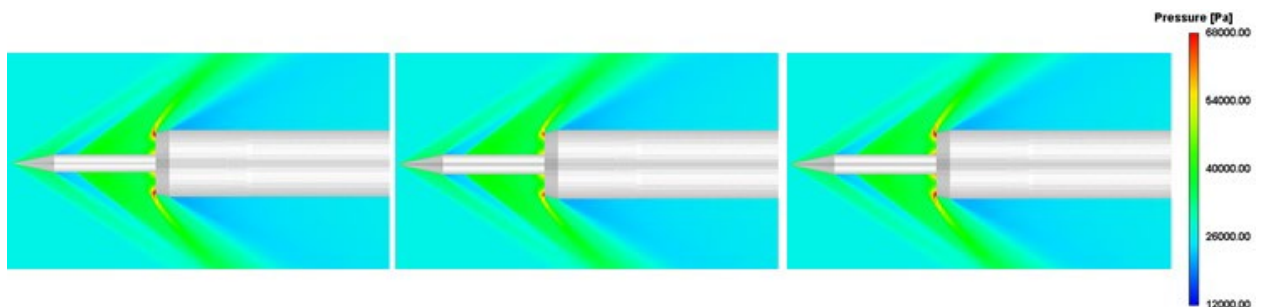


Рисунок 1.5.8 – Поле давления, (слева направо: метод Грина-Гаусса, гибридный метод, МНК)

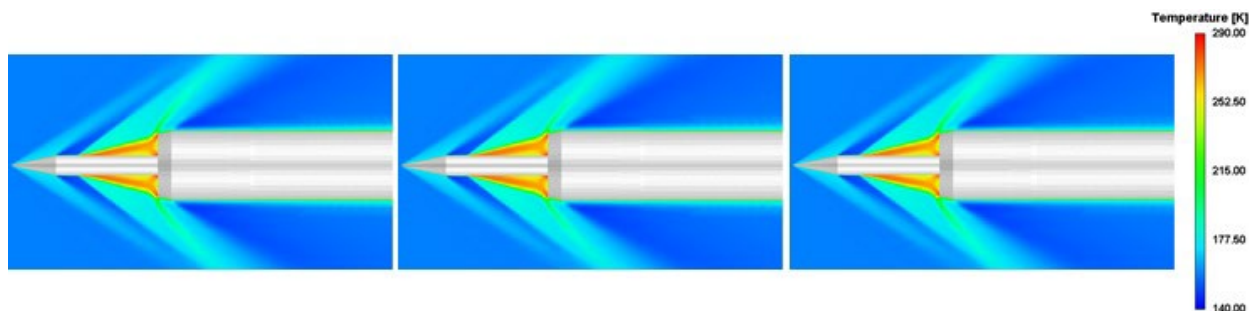


Рисунок 1.5.9 – Поле температуры, (слева направо: метод Грина-Гаусса, гибридный метод, МНК)

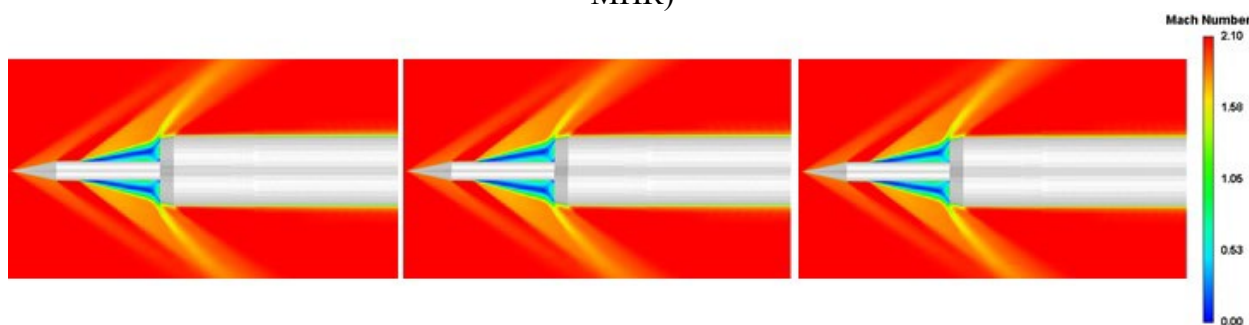


Рисунок 1.5.10 – Поле числа Маха, (слева направо: метод Грина-Гаусса, гибридный метод, МНК)

В данной задаче оценивается величина коэффициента силы лобового сопротивления и при оценки точности используемого численного метода ключевым результатом будет значение погрешности численного его значения (таблицы 1.5.2-1.5.3).

Таблица 1.5.2. Значение C_x , тетраэдральная сетка, (экспериментальное значение $C_x=0,54$)

Метод расчета	Значение C_x		Отклонение от эксперимента, %	
	Блок 1,0 мм	Блок 0,5 мм	Блок 1,0 мм	Блок 0,5 мм
Гибридный метод	0,577	0,573	6,8	6,4
МНК	0,573	0,569	6,2	5,9
метод Грина-Гаусса	0,614	0,604	13,8	13,1

Таблица 1.5.3. Значение C_x , сетка из усеченных шестигранников (экспериментальное значение $C_x=0,54$)

Метод расчета	Значение C_x		Отклонение от эксперимента, %	
	Блок 1,0 мм	Блок 0,5 мм	Блок 1,0 мм	Блок 0,5 мм
Гибридный метод	0,570	0,559	5,5	5,3
МНК	0,583	0,581	8,9	8,4
метод Грина-Гаусса	0,588	0,573	9,04	8,56

Отметим, что разница в отклонении от экспериментального значения в случае блоков с разным сеточным измельчением – менее 1,0%. На основе этого справедливо

считать полученный результат решением данной задачи и говорить о сеточной сходимости используемых моделей.

Напомним, что в задаче исследуется влияние метода расчета градиентов на точность решения в случае неструктурированных сеток из различных элементов. По результатам расчета видно, что наибольшая погрешность в вычислении коэффициента силы лобового сопротивления наблюдается в случае применения метода Грина-Гаусса (причем на обоих типах сеток). На тетраэдральной сетке наблюдается область повышенного давления, что сказывается на максимальном завышении коэффициента силы лобового сопротивления. Наиболее точный результат для этой сетки был получен по методу МНК. Однако, предложенный гибридный метод имеет от него минимальное отличие (~0.6%), которые, скорее всего, добавил вклад метода Грина-Гаусса.

В случае сетки из усеченных шестигранников наблюдаются меньший разброс результатов определения АДХ. Минимальную точность показал метод Грина-Гаусса (9,04%). Но в этот раз, оказавшийся самым точным на тетраэдральной сетке МНК, имеет погрешность 8,4%, что в на данной задаче является средним результатом. В целом, можно считать, что два метода дали очень близкий результат, с отклонением на уровне численной погрешности. Гибридный метод позволил рассчитать коэффициент силы лобового сопротивления с погрешностью 5,3%, что является самым точным результатом на данной сетке. Здесь результаты по МНК и Грина-Гаусса находятся очень близко друг к другу и на этом расчете очень показательно применение гибридного метода – насколько он, изначально из близких двух решений, сможет получить более точный результат. И действительно, применение гибридного метода позволило уменьшить погрешность с 9% (для МНК и Грина-Гаусса) до 5,3%. Именно здесь реализовался тот случай, когда в гибридном методе были совмещены сильные стороны каждого метода для вычисления итогового значения.

При решении рассматриваемой задачи так же был использован модифицированный ограничитель из параграфа 1.3. Для исследования его влияния на результат был проведен дополнительный расчет на сетке из усеченных шестигранников (с блоком локального измельчения 0,5 мм), в котором использовался стандартный вид ограничителя [Venkatakrishnan, 1993]. Результаты сравнения полученных АДХ представлены в таблице 1.5.4.

Таблица 1.5.4. Значение C_x

Ограничитель	Значение C_x	Отклонение от эксперимента, %
Стандартный вид	0.577	6.6
Модифицированный вид	0.570	5.3

При использовании стандартного варианта ограничителя погрешность вычисления коэффициента силы лобового сопротивления повышается на 1.3% и составляет 6.8% в сравнение с экспериментом. Отсюда видно преимущество в точности полученного решения при использовании модифицированного варианта ограничителя при решении практической задачи на произвольной неструктурированной сетке.

Сверхзвуковое обтекание пули «168 Grain Sierra International Bullet»

Применим модифицированный вариант ограничителя и гибридный метод расчета градиентов для моделирования сверхзвукового обтекания пули «168 Grain Sierra International Bullet» [Robert L. Mc.Coy, 1998]. Для расчетной области данной задачи построена неструктурированная сетка из усеченных шестигранников (рисунок 1.5.11) с общим числом элементов ~386 тысяч.

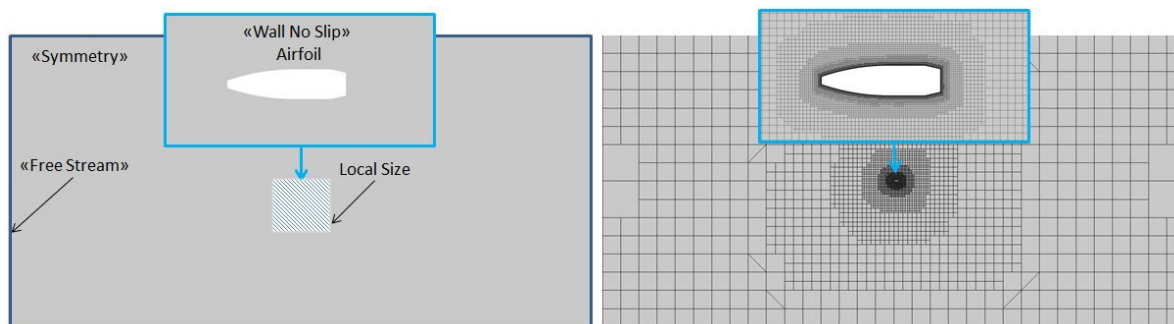


Рисунок 1.5.11 – Общий вид расчетной области

Области течения, в которых число Маха близко к 1, характеризуются сложностью из-за образования скачков уплотнения и возможных срывов потока, которые существенно влияют на аэродинамические характеристики объекта. Полученные здесь результаты также могут быть обобщены на тела, которые геометрически схожи с рассматриваемым объектом. Геометрия пули, свойства потока и экспериментальные значения АДХ взяты из [Robert L. Mc.Coy, 1998].

Рассмотрим задачу со следующими граничными условиями. Параметры набегающего потока на внешней границе расчетной области соответствуют величинам: давление 101325 Па, температура 288.15° К, угол атаки 0°, число Маха 1.6 [Robert L. Mc.Coy, 1998]. Поверхность пули считается непроницаемой стенкой, на боковой границе задано симметричное граничное условие.

В случае числа Маха равного 1.6 течение характеризуется наличием головной ударной волны (рисунок). Распределение газодинамических параметров потока вблизи всей поверхности исследуемого объекта существенно влияет на АДХ. Ввиду этого для

получения качественного решения необходимо обеспечить правильную работу функции ограничителя и расчет градиентов в данной области.

В общей структуре потока при визуальном анализе отличий в решениях с разными способами вычисления градиента не наблюдается, поэтому для демонстрации структуры потока приведем результаты с использованием гибридного метода вычисления градиентов (рисунок 1.5.12-1.5.13).

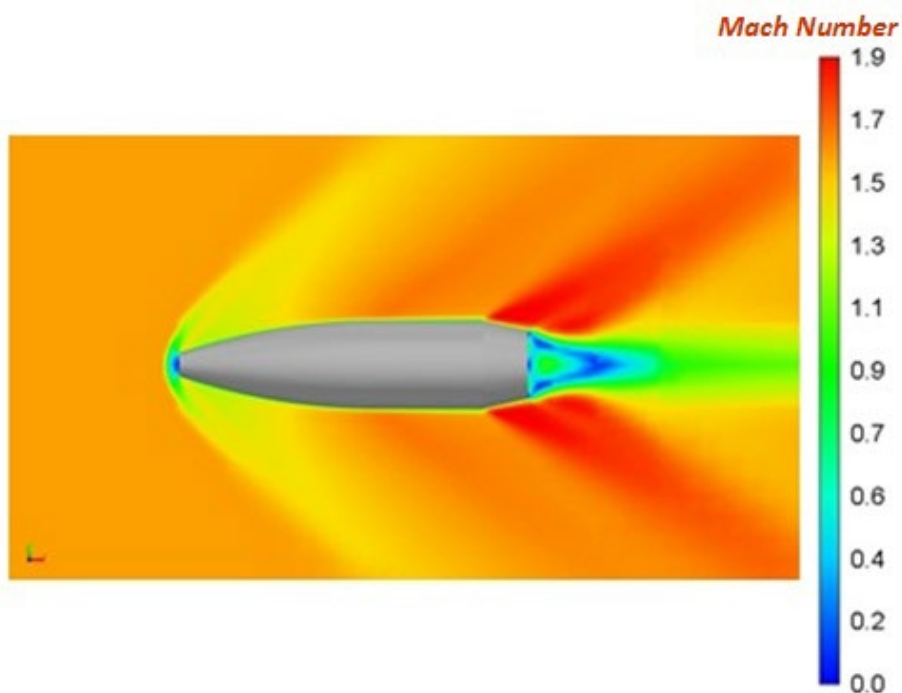


Рисунок 1.5.12 – Распределение числа Маха

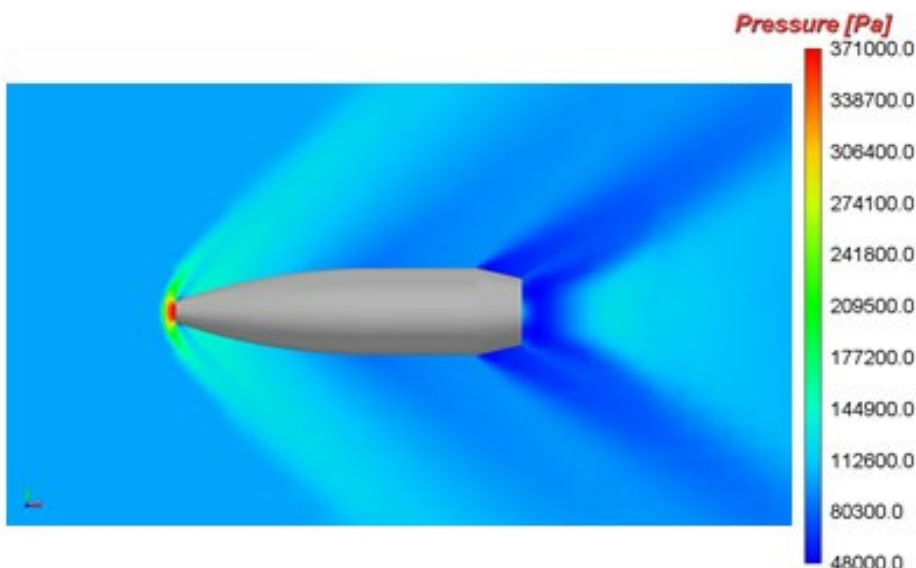


Рисунок 1.5.13 – Распределение давления

Оценим величину коэффициента силы лобового сопротивления (C_x), полученную при использовании разных вариантов вычисления градиентов, в сравнении с экспериментальными данными (таблица 1.5.5) [Robert L. Mc.Coy, 1998].

Таблица 1.5.5. Значение C_x

№	Вариант расчета	C_x ($M=1.6$)	$\Delta C_x, \%$ ($M=1.6$)
0	Эксперимент	0.385	–
2	МНК	0.4185	8.7
3	Метод Грина-Гаусса	0.4215	9.4
4	Гибридный метод	0.4121	7.1

Согласно результатам расчетов, представленных в таблице, наибольшее отклонение результатов от экспериментальных данных наблюдается в случае расчета градиентов методом Грина-Гаусса. Наименьшую погрешность в расчете коэффициента силы лобового сопротивления удалось получить при использовании предложенного гибридного метода вычисления градиентов.

Представленные выше результаты были получены с использованием модифицированного ограничителя. Для исследования его влияния на результат был проведен дополнительный расчет, в котором использовался стандартный вид ограничителя [xx] в сочетании с гибридным методом расчета градиентов. Результаты сравнения полученных АДХ представлен в таблице.

Таблица 1.5.6. Значение C_x

Ограничитель	Значение C_x	Отклонение от эксперимента, %
Стандартный вид	0.4219	10.2
Модифицированный вид	0.4121	7.1

Таким образом, модифицированная форма ограничителя позволяет получить более точное решение в случае рассмотрения течения с ударно-волновыми процессами на неструктурированной сетке.

По результатам представленного исследования справедливо сделать следующие выводы:

- точность классических методов расчета градиентов сильно зависят от геометрии расчетных ячеек;

- предложенный гибридный метод расчета градиентов позволяет получать решение с меньшей локальной погрешностью (или аналогичной) в сравнении с классическими методами на произвольных неструктурированных сетках;
- модифицированный вариант ограничителя способствует повышению точности расчета сверхзвуковых течений.

В результате исследования применимости стандартных подходов вычисления градиента на неструктурированных сетках была показана локальная погрешность, достигающая до 30%. Представленный в работе гибридный метод позволил снизить локальную погрешность до 8%. При решении практических задач это позволило получить более точное значение АДХ исследуемого объекта.

1.6 Заключение

В главе приводится математическая модель для описания течения вязкого сжимаемого газа. Модель построена на основе системы уравнений Навье-Стокса, дополненной уравнениями относительно турбулентной вязкости. Дискретизация уравнений осуществляется методом конечных объемов, с применением соответствующих схем.

При построении математических методов и алгоритмов особое внимание уделялось их применимости на неструктурированных сетках и повышению точности при описании ударно-волновых процессов. Так в главе дается описание модифицированного варианта ограничителя при интерполяции газодинамических величин на грань ячейки. Показано, что предложенный вариант применим при расчете на неструктурированных сетках и способствует повышению точности решения. Его применение на задаче сверхзвукового обтекания позволило уменьшить погрешность в определении силы лобового сопротивления на 3%, что является неоспоримым преимуществом предложенного варианта над первоначальным.

Так же в главе исследована применимость методов расчета градиента на различных сетках. Для повышения точности в случае использования неструктурированных сеток в главе предлагается гибридный метод. Применение описанного метода вычисления градиентов показано на задачах сверхзвукового обтекания и продемонстрировано повышение точности получаемого решения.

В целом, при совместном использовании в рамках одной математической модели, предложенные автором численные схемы, существенно повышают точность расчета сверхзвуковых течений, характеризующихся ударно-волновыми процессами на неструктурированных сетках.

Глава 2. Методы и алгоритмы на сеточном уровне для повышения эффективности моделирования сверхзвуковых течений

2.1 Введение

Как уже отмечалось, при разработке математической модели для расчета сверхзвуковых течений остро встает вопрос о повышении ее эффективности – ускорения сходимости численного решения и повышения его точности. Если в первой главе диссертационной работы для повышения эффективности были представлены численные схемы, то далее рассмотрены методы и алгоритмы сеточного уровня.

Так в параграфе 2.2 представлен способ введения процедуры начальной инициализации на основе геометрического многосеточного метода [Волков, 2013; Mavriplis, 2002; Wesseling&Oosterlee, 2001; Стручков, 2021]. Идея метода состоит в генерации на основе исходной базовой сетки последовательности грубых сеток, на которых решается рассматриваемая задача до полной сходимости численного решения. Решение задачи начинается с самой грубой сетки. За счет того, что огрубленные сетки имеют меньшее число ячеек, в сравнении с исходной базовой, решение на них имеет более высокую скорость сходимости. Затем, полученное решение интерполируется на более подробную сетку, а в итоге – на исходную базовую сетку, и используется как начальная инициализация при расчете. Таким образом, за счет использования начальной инициализации, максимально близкой к конечному решению, ускоряется процесс сходимости этого решения как на каждой сетки в последовательности, так и в итоге – на базовой сетке. Результаты применения описанного алгоритма рассмотрены как в рамках параграфа 2.2, так и более подробно в параграфе 2.4.

В параграфе 2.3 для повышения точности решения применяют локальное измельчение сеточной модели [Гильманов, 2000; Zegeling, 2007], построенное средствами метода адаптивных сеток. Такой метод позволяет на основе получаемого решения автоматически измельчать сетку лишь в тех областях, для которых локально требуется его улучшить. Основной принцип метода адаптивно-встраивающихся сеток состоит в уменьшении размеров ячеек по средствам встраивания дополнительных узлов и позволяет измельчать только определенную часть расчетной сетки без изменения сетки в области с гладким решением. Применимость алгоритма показана на задачах в параграфах 2.3, 2.4.

В параграфе 2.4 моделируется распространение ударной волны в результате сверхзвукового обтекания объекта и проводится исследование сверхзвуковой струи газа, выходящей из сопла SMC020.

В заключении, в параграфе 2.5, сделаны главные выводы по результатам главы в целом. Таким образом, в данной работе, повышение эффективности математической

модели для расчета сверхзвуковых течений осуществляется за счет использования многосеточной инициализации для ускорения сходимости численного решения в сочетании со статической адаптацией расчетной сетки для повышения точности численного решения. При этом методы реализованы с возможностью их использования на неструктурированных сетках [Kozelkov et al., 2022(a)].

2.2 Метод многосеточной начальной инициализации

Основная проблема в случае моделирования сверх- и гиперзвуковых течений – это устойчивость численного решения в момент формирования ударной волны при прохождении возмущения по равномерному начальному полю. Поэтому для сохранения устойчивости численного решения на этапе установления течения необходимо вести счет с соответствующими параметрами, характеризующимися большей устойчивостью и меньшей скоростью сходимости (например, малое значение числа Куранта) [Волков, 2013].

С большей эффективностью этап формирования неравномерного распределения газодинамических величин можно рассмотреть с использованием многосеточной инициализации. В этом случае поле течения формируется на последовательности грубых сеток с использованием наиболее устойчивых численных схем первого порядка точности [Doru Caraeni, 2013]. За счет крупных ячеек и «размытия» на них фронта ударной волны – удастся на много быстрее, в сравнении с изначальной сеткой, провести заданное возмущение по расчетной области и получить установившуюся структуру течения. Далее, при переходе к более подробной сетке в последовательности, сформированное течение уточняется за счет более детального описания фронта ударной волны на более мелких ячейках. Таким образом, на момент начала решения с использованием исходной сетки, поле распределения физических величин максимально близко к конечному решению и особенности решения (например, ударная волна) имеет сформированную структуру.

В случае классического подхода полный шаг численной итерационной процедуры представлен на рисунке 2.2.1 слева, а с учетом подхода, основанного на многосеточной инициализации – на рисунке 2.2.1 справа.

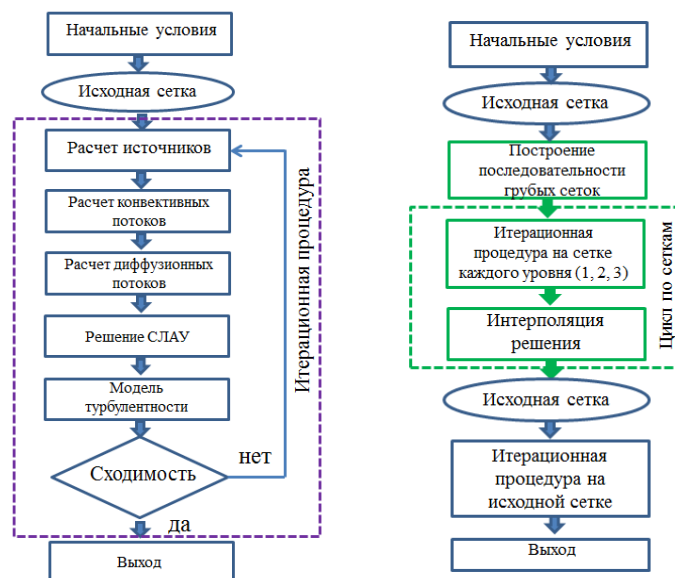


Рисунок 2.2.1 – Вычислительный алгоритм

В соответствии с блок-схемой (рисунок 2.2.1 слева), перед началом итерационной процедуры на исходной базовой сетке выполняется инициализация расчетной области однородным равномерным полем всех расчетных величин в соответствии с заданными начальными условиями. Далее выполняется расчет источников, конвективных и диффузионных потоков, а так же расчет уравнений модели турбулентности. Итерационный процесс продолжается до достижения сходимости численного решения.

Для реализации алгоритма многосеточной инициализации [Стручков, 2021] необходима модификация счетного алгоритма, заключающаяся в добавлении двух шагов. Первый шаг – это введение перед основной итерационной процедурой алгоритма построения последовательности грубых сеток на основе исходной базовой сетки. Второй шаг – выполнение итерационной процедуры и получение конечного решения на каждой из построенных сеток, с интерполяцией решения при переходе от сетки к сетке (интерполяция осуществляется простым переносом сеточных массивов при переходе от грубой к более подробной сетке).

В рамках первого шага важным вопросом является способ построения последовательности грубых сеток. Так один из подходов осуществляется на основе взвешенного графа, соответствующего исходной сетки. Для построения взвешенного графа существуют следующие правила. Каждой ячейки сетки ставится в соответствие вершина графа [Nishikawa&Diskin, 2011]. Две вершины графа соединены через ребро, если соответствующие ячейки сетки разделены общей гранью. Пример фрагмента трехмерной сетки (сетка в одну ячейку толщиной) и соответствующий ей взвешенный граф представлен на рисунке 2.2.2.

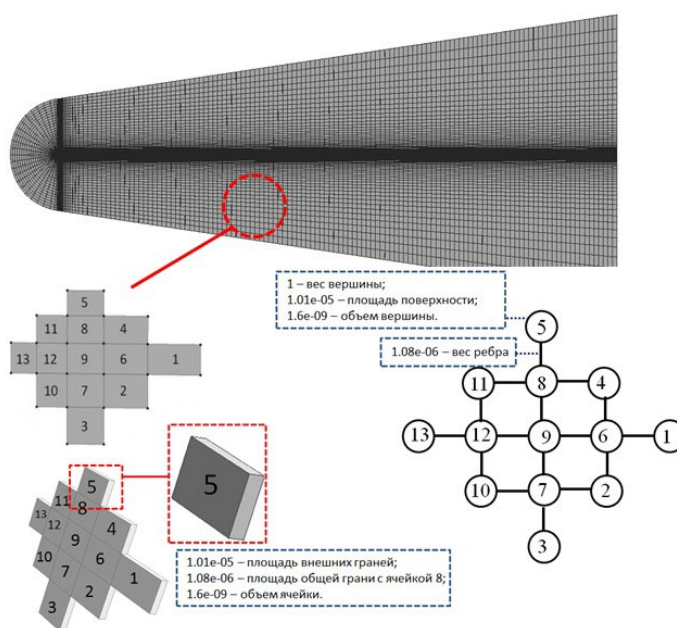


Рисунок 2.2.2 – Сетка и соответствующий ей взвешенный граф

Вершину графа характеризуют три значения – вес вершины, площадь поверхности вершины и объем вершины. Вес вершины характеризует количество исходных ячеек сетки, образующих данный контрольный объем. Изначально вес каждой вершины графа исходной сетки равен одному. По мере огрубления сетки значение весов для вершин обновляются и становятся равными числу ячеек, образующих данный контрольный объем. Площадь поверхности вершины характеризует площадь поверхности, не используемой совместно с другими контрольными объемами, то есть являющейся внешней границей сетки. Следует отметить, что для всех внутренних контрольных объемов этот параметр равен нулю. Объем вершины графа соответствует объему контрольного объема. Кроме того, каждое ребро взвешенного графа имеет вес, характеризующий площадь поверхности, разделяющей два контрольных объема. Таким образом, взвешенный граф содержит всю информацию необходимую для формирования контрольного объема грубой сетки. Далее на основе алгоритма агломерации, с использованием взвешенного графа, выполняется построение последовательности грубых сеток, отличающихся друг от друга максимальным числом ячеек исходной сетки, используемых для объединения в новые контрольные объемы.

В алгоритме агломерации (agglomeration method) производится слияние контрольных объемов подробной сетки, имеющих общую грань, в контрольный объем грубой сетки (full coarsening) [Nishikawa&Diskin, 2011; Dervieux, 1992, Carre, 1997; Mavriplis 1995, 1999; Pierce et al., 1997; Bank&Xu, 1996]. Для улучшения качества сеток на размер контрольных объемов грубой сетки накладываются дополнительные ограничения. Наиболее важным ограничением является размер и форма контрольного объема, полученного в результате слияния нескольких соседних контрольных объемов подробной сетки. Для преодоления проблем, связанных с дискретизацией основных уравнений (1) на грубых сетках, при формировании контрольного объема оценивают его меру качества. Мера качества – это критерий для оценки применимости контрольного объема при дискретизации основных уравнений. Для контрольного объема произвольной неструктурированной сетки меру качества A , можно вычислить, используя геометрические параметры ячейки – площади сторон и объем. В численном виде данная мера имеет следующее выражение (2):

$$A = S^{3/2}/V, \quad (2.2.1)$$

где S – площадь сторон контрольного объема, V – объем.

Контрольный объем считается хорошо сформированным, если он является максимально компактным, то есть отношение суммы площадей граней к объему является минимальным. Рассмотрим работу алгоритма на примере фрагмента трехмерной сетки, состоящего из 13 ячеек, показанного на рисунке 2.2.3(а).

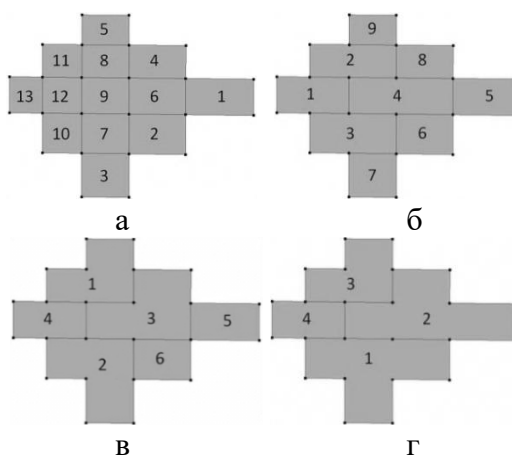


Рисунок 2.2.3 – Фрагмент сетки, пример работы алгоритма

Для объединения в новые контрольные объемы выполняется цикл по ячейкам сетки. Для каждой ячейки ее соседи рассматриваются как потенциальные варианты для объединения в один контрольный объем. Так для сетки на рисунке 2.2.3(а), возможные новые контрольные объемы могут быть сформированы следующими парами ячеек: (6-1), (6-2), (6-4), (7-2), (7-3), (8-4), (8-5), (9-6), (9-7), (9-8), (10-7), (11-8), (12-9), (12-10), (12-11), (13-12). Так как каждая ячейка может быть включена только в один новый контрольный объем, то для выбора соседней ячейки, с которой она будет объединена, используется критерий вида (1) и выбирается та соседняя ячейка, при объединении с которой выражение (1) принимает минимальное значение. Таким образом, в результате первой итерации объединения новые контрольные объемы формируются следующими парами ячеек (рисунок 2.2.3(б)):

- новый контрольный объем 1 – формируется парой ячеек (13-12),
- новый контрольный объем 2 – формируется парой ячеек (11-8),
- новый контрольный объем 3 – формируется парой ячеек (10-7),
- новый контрольный объем 4 – формируется парой ячеек (9-6).

При этом ячейки 1, 2, 3, 4, 5 не вошли в новые контрольные объемы на первой итерации объединения. В конце операции объединения происходит переиндексация всех контрольных объемов сетки (рисунок 2.2.3(б)). Итерации объединения продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто максимальное количество ячеек в новом контрольном объеме, в данном случае оно равно четырем. На рисунке 2.2.3(в) и 2.2.3(г) показаны новые контрольные объемы, полученные в результате второй и третьей итерации объединения.

Как видно из рисунка 2.2.3(г), максимальное число ячеек в новом контрольном объеме равно четырем и последующее объединение контрольных объемов не возможно.

Последовательность сеток различной разрешающей способности, построенная при помощи метода агломерации, для профиля крыла NACA0012 [Повх, 1976; Charles, 1987] приводится на рисунке 2.2.4. Для первого уровня объединение в новый контрольный объем выполняется по 4 ячейки, для второго уровня – по 8, для третьего уровня по 16. Исходная сетка наилучшей разрешающей способности содержит 157914 ячеек (фрагмент а). При переходе к грубым сеткам число ячеек уменьшается примерно в 4 раза (фрагмент б, 41907 ячеек), в 8 раз (фрагмент в, 21529 ячеек) и в 16 раз (фрагмент г, 11022 ячеек), а форма ячеек сетки становится более сложной.

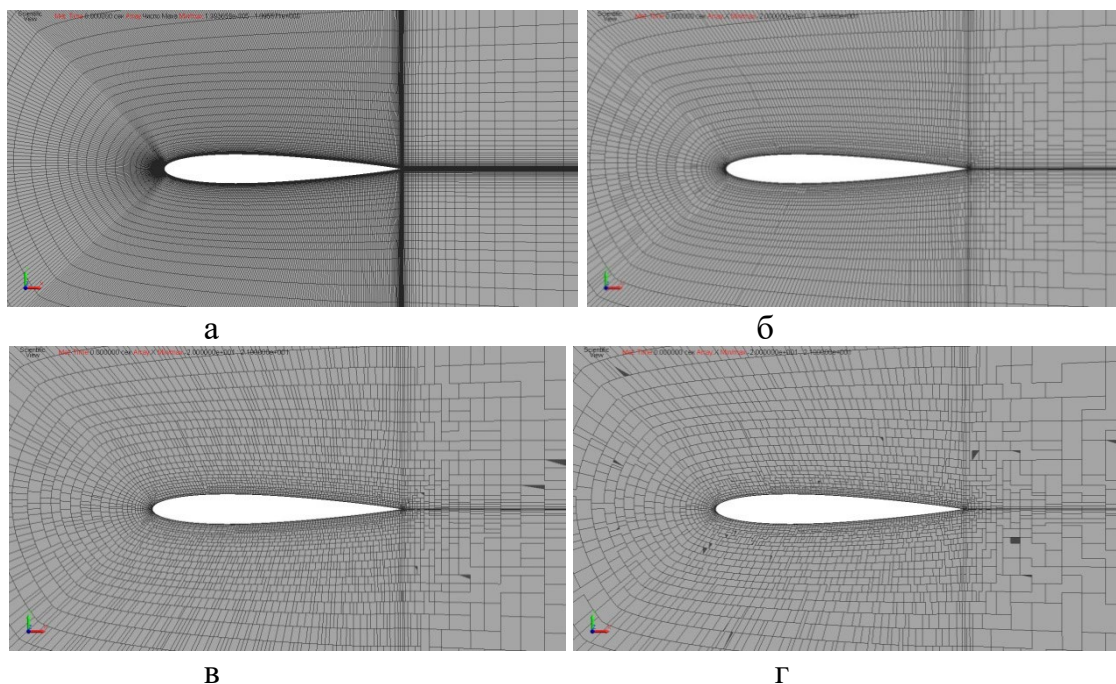


Рисунок 2.2.4 – Последовательность сеток, построенная при помощи метода агломерации: а – исходная, б – 1го уровня, в – 2го уровня, г – 3го уровня

На рисунке 2.2.5(г) показано решение, полученное на сетке 3-го уровня. Далее это решение в качестве начальной инициализации переносилось на сетку 2го уровня и полученное на ней решение представлено на рисунке 2.2.5(в). Затем тоже выполняется для сетки 1-го уровня и исходной сетки. В итоге, решение на сетке 1-го уровня показано на рисунке 2.2.5(б), а решение на исходной сетке – на рисунке 2.2.5(а).

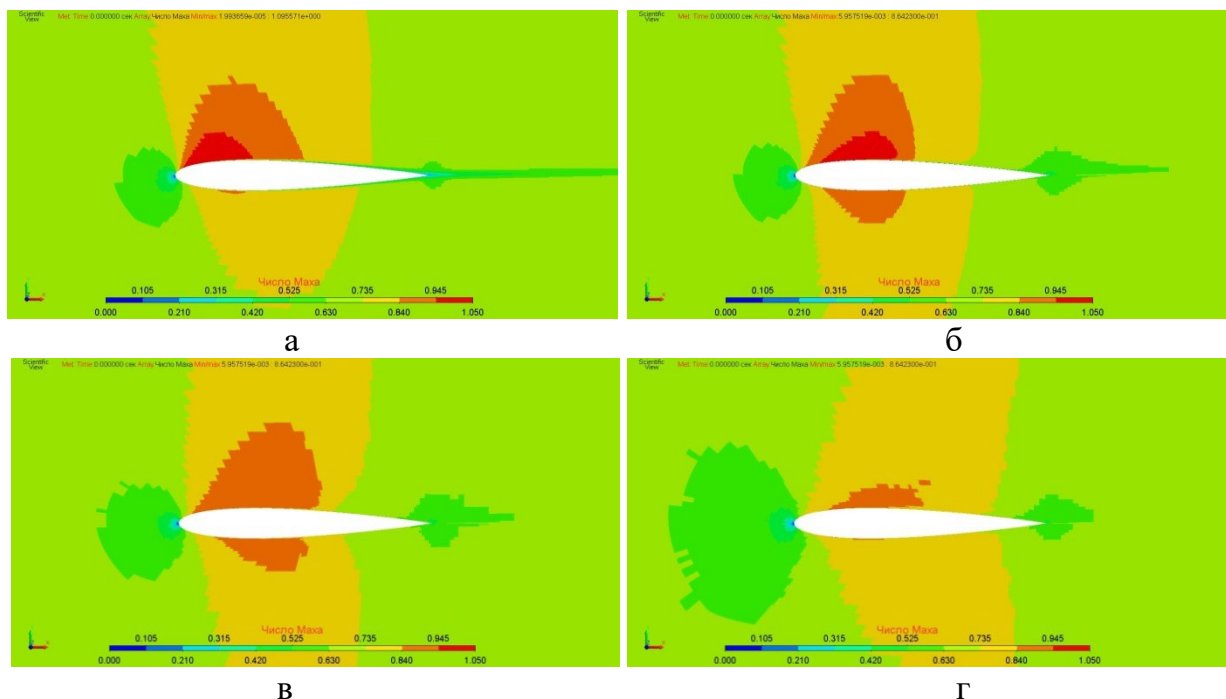


Рисунок 2.2.5 – Решение, поле распределение числа Маха, полученное на сетках: а – исходная, б – 1го уровня, в – 2го уровня, г – 3го уровня

Таким образом, применение шага геометрической многосеточной инициализации позволяет выбрать начальное приближение численного решения. Однако для данного метода построения существует несколько недостатков, выявленные в процессе использования алгоритма. Так, наиболее существенной, является проблема сильно искаженных (невыпуклых многогранников) ячеек, на которых выполняется дискретизация расчетной области. Подобные контрольные объемы повышают риск получить нефизичное решение и замедляют процесс сходимости. Кроме того, объединение в максимальном случае по 16 ячеек на самом грубом уровне хоть и уменьшает размерность сеточной модели, однако в плане использования многосеточного алгоритма выглядит не достаточным.

Приведенные недостатки отсутствуют у некоторых других способов построения последовательности грубых сеток. Рассмотрим подход, основанный на построении равномерной кубической (квадратной) сетки. Перед построением серии грубых сеток на базе исходной сетки выполняется определение геометрических размеров расчетной области, то есть строится габаритный параллелепипед (рисунок 2.2.6).

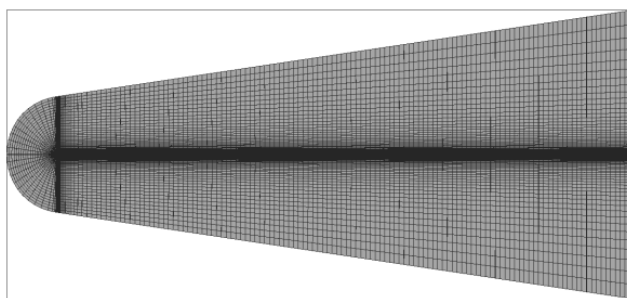


Рисунок 2.2.6 – Габаритный параллелепипед

Далее, для каждого уровня сеток задается размер ячеек грубого уровня. Исходя из этого размера, в габаритном параллелепипеде расчетной модели строится равномерная кубическая сетка. Ячейки исходной сетки, центры которых попали в ту или иную ячейку построенной сетки, будут составлять макро-ячейку грубого уровня. В зависимости от размеров ячеек грубого уровня в одну макро-ячейку могут попасть до нескольких тысяч ячеек исходной сетки (рисунок 2.2.7).

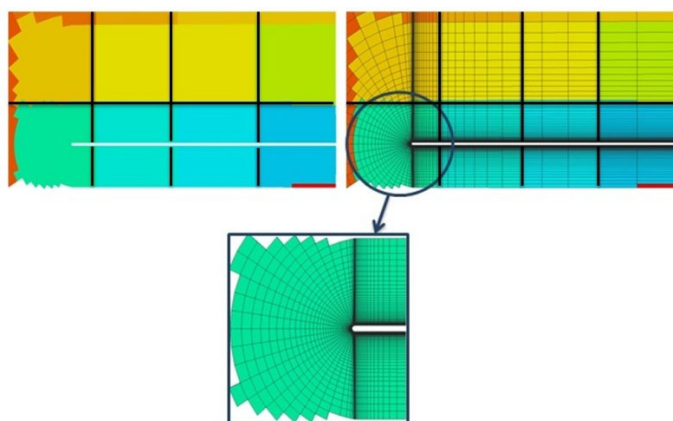


Рисунок 2.2.7 – Равномерная кубическая сетка, одна макро-ячейка (крупно)

Такой алгоритм построения сетки грубого уровня приводит к возникновению макро-ячеек, объем которых многократно меньше заданного объема ячеек. Это может происходить из-за особенностей геометрии задачи или положения межпроцессорных границ. Для того чтобы ячейки сетки грубого уровня были приблизительно равного размера и объема, выполняется слияние макро-ячеек, объем которых более чем в 10 раз меньше заданного. Слияние происходит с ближайшей макро-ячейкой. Таким образом, на каждом уровне сеток формируются макро-ячейки, состоящие из ячеек исходной сетки.

При переходе на более подробный уровень значение размера ячеек уровня уменьшается вдвое. Максимальное число уровней сеток, предложенное авторами алгоритма, равно семи, но это число может быть уменьшено в зависимости от максимального числа ячеек исходной сетки, которое составляет одну макро-ячейку.

После исследования особенностей каждого из методов, для использования на практике был выбран алгоритм на основе построения равномерной кубической сетки и все рассмотренные далее задачи решались именно с ним.

Как уже говорилось выше, на каждом уровне грубых сеток решается задача на установление по моделированию течения вязкого сжимаемого газа явным методом. Для этого необходимо задать максимальное число итераций и значение максимальной невязки в качестве критерия завершения счета задачи на текущем уровне сетки. Полный алгоритм решения задачи на установление на каждом уровне выглядит следующим образом:

1. По заданному размеру ячеек происходит построение текущего уровня сеток;
2. Для построенной сетки грубого уровня формируется список граней ячеек исходной сетки, которые являются гранями макро-ячеек текущего уровня сетки;
3. На всех внутренних гранях выполняется расчет конвективных потоков методом AUSMPW [Liou, 1996; Rodionov, 2018; Kotov&Surzhikov, 2011; Matsuyama Shingo, 2014];
4. На всех внешних гранях ячеек исходной сетки рассчитываются потоки в зависимости от заданных граничных условий;
5. Для всех макро-ячеек текущего уровня сетки с использованием явной схемы [Волков и др. 2013] рассчитываются новые значения параметров, и выполняется одновременное копирование значений во все ячейки исходной сетки;
6. Выполняются межпроцессорные обмены;
7. Проверяется критерий завершения счета на данном уровне огрубления;
8. Проверяется критерий завершения работы процедуры многосеточной инициализации. В случае, если достигнут максимальный 7 уровень сеток или максимальное число ячеек исходной сетки в макро-ячейке стало меньше 50, то завершаем основной цикл по уровням сеток;
9. Далее выполняется итерационная процедура решения задачи на исходной сетке.

Для исследования зависимости скорости сходимости численного решения от использования геометрической многосеточной инициализации рассматривается задача моделирования сверхзвукового течения в канале с клином (рисунок 2.2.8) [Волков и др. 2013]. Данная задача и ее постановка представлена в параграфе 1.3, где она использовалась для калибровки параметров ограничителя.



Рисунок 2.2.8 – Схема задачи

При решении задачи использовался алгоритм геометрической многосеточной инициализации, в результате работы которого было получено следующее начальное приближение решения (рисунок 2.2.9). Из рисунка видно, что в канале формируется ударно-волновая структура, распространяющаяся по его длине. Однако сеточного разрешения недостаточно для описания интенсивности ударной волны, в результате чего она в конце канала имеет размытый профиль.

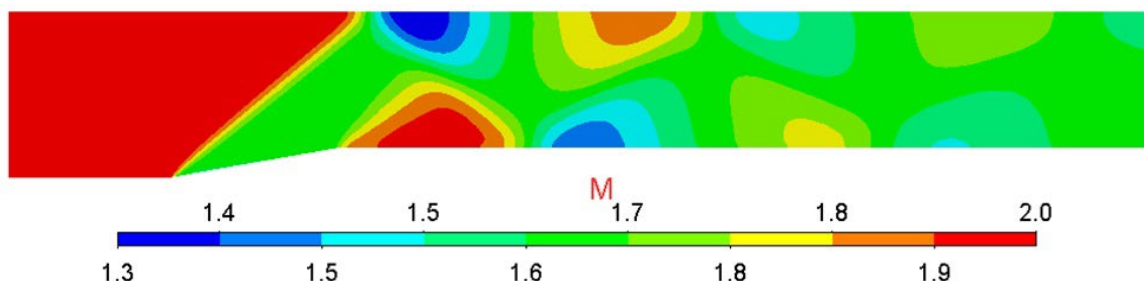


Рисунок 2.2.9 – Поле распределения числа Маха (решение, начальная инициализация)

Далее, полученное решение использовалось как начальная инициализация при расчете на исходной сетке. В результате было получено решение, показанное на рисунке 2.2.10.

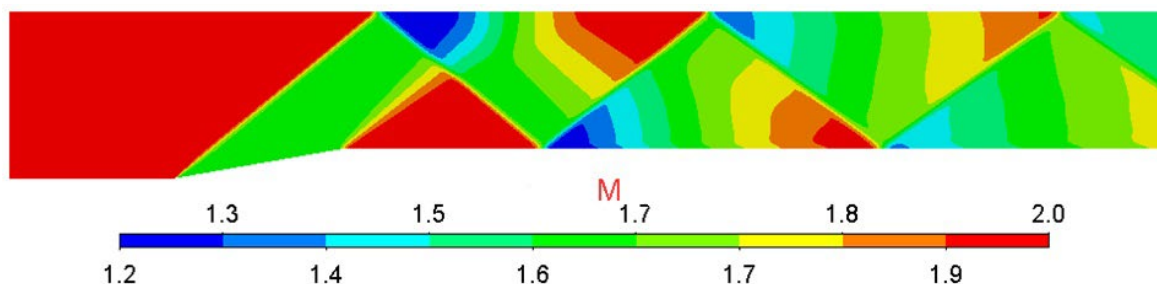


Рисунок 2.2.10 – Поле распределения числа Маха (конечное решение)

Можно отметить, что начальная инициализация и конечное решение имеют одинаковую структуру течения (система ударных волн, отразившихся от стенок канала) и отличаются лишь интенсивностью ударно-волновой структуры, что объясняется сеточным разрешением.

Для оценки влияния начальной инициализации на скорость сходимости решения, сравним график установления величины расхода через выходную границу канала в случае

использования алгоритма геометрической инициализации перед началом решения и без его использования.

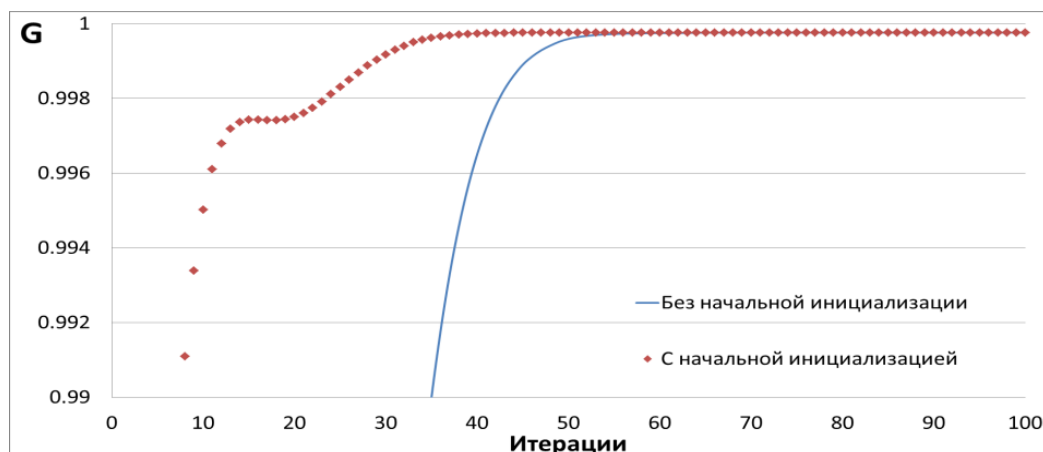


Рисунок 2.2.11 – График сходимости нормированной величины расхода (G , кг/с)

В случае использования начальной инициализации решение сошлось за 35 итераций, в то время как без нее – примерно, за 60 итераций. Как отмечалось выше, задача является простым тестом для верификации численных схем и алгоритмов и характеризуется быстрым процессом сходимости. Именно поэтому в данной задаче разница в скорости сходимости полностью нивелируется затраченным временем на выполнение алгоритма многосеточной инициализации. По результатам можно сделать вывод, что начальная инициализация положительно влияет на скорость сходимости численного решения и при одинаковых параметрах решателя уменьшает число итераций для его получения.

Для демонстрации полной возможности алгоритма многосеточной инициализации, в части ускорения сходимости численного решения и повышения его устойчивости, рассматривается задача обтекания конуса гиперзвуковым потоком невязкого сжимаемого газа [Краснов, 1964].

Для постановки численного эксперимента на входной границе области обтекания (рисунок 2.2.12) задается статическое давление 4.5 Па, температура $T=216^\circ$ К и скорость потока, равная числу Маха 7. Поверхность конуса считается твердой стенкой. Число ячеек в расчетной сетке составляет 557039.

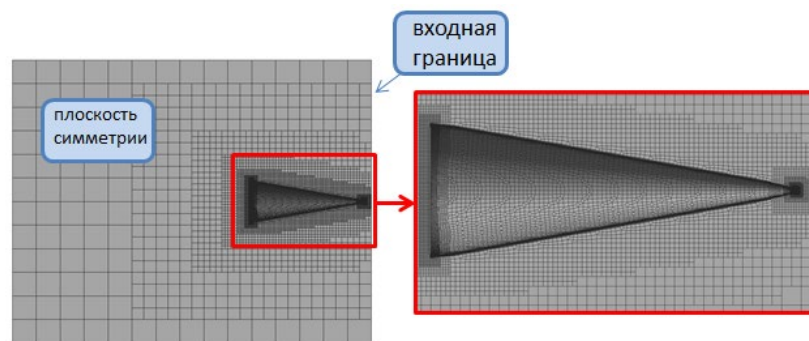


Рисунок 2.2.12 – Общий вид расчетной области, сечение в плоскости симметрии

В результате применения алгоритма геометрической многосеточной инициализации было получено начальное приближение решения, показанное на рисунке 2.2.13, слева.

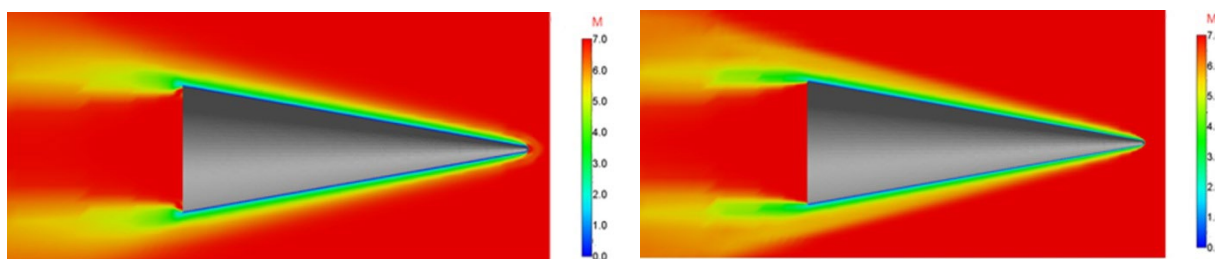


Рисунок 2.2.13 – Поле распределения числа Маха: слева – начальная инициализация, справа – конечное решение

Далее, полученное решение использовалось как начальная инициализация при расчете на исходной сетке. В результате было получено решение, показанное на рисунке 2.2.13, справа.

Можно отметить, что начальная инициализация и конечное решение имеют одинаковую структуру течения, отличаются лишь интенсивностью ударно-волновой структуры и их качеством разрешения. Например, для конечного решения, в донной части отрывные зоны имеют более детальное разрешение и четкие границы.

Для оценки скорости сходимости решения в задаче с использованием начальной инициализации и без нее построен график сходимости величины силы лобового сопротивления (рисунок 2.2.14).

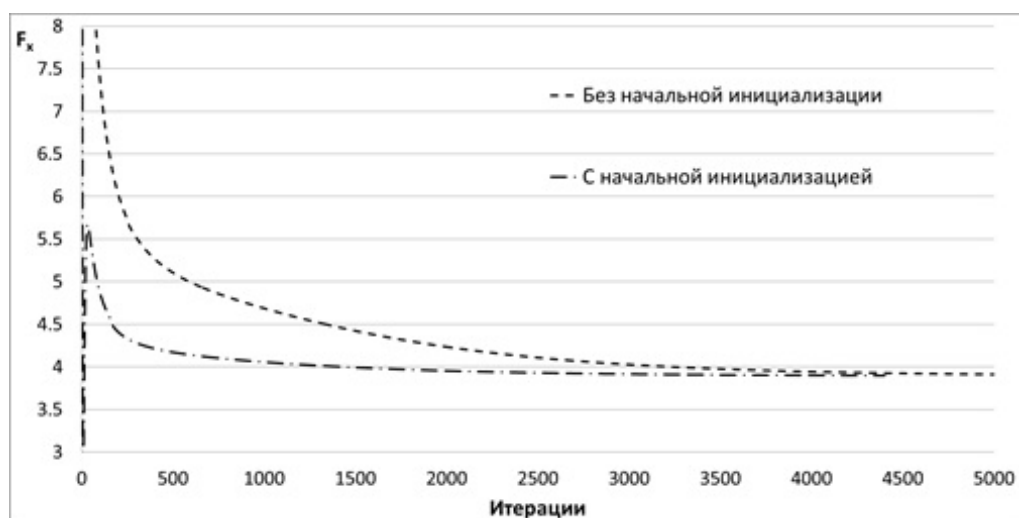


Рисунок 2.2.14 – График сходимости силы лобового сопротивления (F_x , Н)

Видно, что оба решения сходятся к одному значению, однако в случае использования начальной инициализации решение сошлось за 3000 итераций, в то время как без нее – примерно, за 4000 итераций. В таблице 2.2.1 представлена оценка времени при решении данной задачи в обоих вариантах.

Таблица 2.2.1. Временные затраты

Способ решения	Время начальной инициализации, с	Число итераций	Общее время, с (время одной итерации 0.65 с)
Без начальной инициализации	-	4000	2600
С начальной инициализацией	45.55	3000	1995.55

Таким образом, с применением многосеточной начальной инициализации удалось сократить время решения задачи на ~23%. Кроме того, применение начальной инициализации позволило вести счет с максимальным начальным значением числа Куранта, что говорит о повышении устойчивости численного решения. В то время как без использования алгоритма – значение числа Куранта приходится увеличивать постепенно в процессе счета задачи.

Следует отметить, что использование алгоритма многосеточной инициализации не вносит дополнительной численной погрешности в решение, о чем говорит график сходимости к одной величине по значению силы лобового сопротивления (рисунок 9). Итоговые значения коэффициента силы лобового сопротивления в обоих случаях одинаковы и равны 0.1803. Сравнение с аналитическим решением [Краснов, 1964] дает отклонение в 0.5%.

2.3 Метод статической адаптации расчетной сетки под особенности течения

Задачи внешней и внутренней аэродинамики характеризуются одновременным наличием зон с транс-, и сверхзвуковыми скоростями течения. Сложность моделирования таких течений обуславливается наличием в потоке ударных волн и контактных разрывов. На практике решение таких задач осуществляется за счет применения численных схем повышенного порядка аппроксимации [Булат&Волков, 2015, Козелков и др., 2014] и использования низко-диффузионных разностных схем [Chakravarthy&Osher, 1985; Gottlieb, 2005].

Применение всех этих подходов требует построения качественной расчетной сетки. Так, широкое практическое применение получили расчеты на блочно-структурированных сетках [Travin et al., 2000], однако диапазон геометрических объектов, описываемых таким сетками, ограничен. Неструктурированные сетки обладают большей гибкостью при дискретизации физических областей сложной геометрической конфигурации и обеспечивают возможность полной автоматизации процесса построения сеточной модели. В настоящее время именно неструктурированные сетки являются главной составляющей процесса решения большинства промышленно-ориентированных задач [Погосян и др., 2013].

Однако основной проблемой при использовании любых сеток является возможная потеря точности решения из-за недостаточной сеточной разрешимости, особенно в области ударных волн и контактных разрывов. Одним из эффективных методов повышения сеточной разрешимости является применение локального измельчения сеточной модели. Однако на этапе построения расчетной сетки предопределение точного положения особенностей решения для построения локального измельчения ячеек нетривиально: положение области измельчения приходится определять из общих соображений, а ее размер выбирать с «запасом». Зачастую это приводит к получению весьма избыточной по размерам сеточной модели. Таким образом, возникает потребность в автоматизации процесса определения локальной области сгущения сеточной модели, для более точного разрешения физических особенностей течения.

Для выполнения данной задачи используют метод динамически адаптивных сеток [Гильманов, 2000; Plewa et al., 2003, Alauzet, 2019], позволяющий на основе получаемого решения автоматически измельчать сетку лишь в тех областях, для которых локально требуется его улучшить. По способу подстраивания под особенности решения динамически адаптивные сетки делятся на адаптивно-подвижные и адаптивно-встраивающиеся сетки [Гильманов, 2000].

При использовании адаптивно-подвижных сеток число элементов расчетной модели не изменяется. Для улучшения решения и повышения его точности узлы первоначальной сетки перемещаются в области с высокими градиентами газодинамических переменных, тем самым создавая в области особенности решения локальное сгущение. Недостатком этого метода является возможное сильное искажение сетки с последующей потерей точности решения.

Основной принцип метода адаптивно-встраивающихся сеток состоит в уменьшении размеров ячеек по средствам встраивания дополнительных узлов. Данный подход позволяет измельчать только определенную часть расчетной сетки без изменения сетки в области с гладким решением. В работах [Вальгер&Фёдорова, 2012; Бедарев&Федоров, 2009; Барахнин&Карамышев, 2000] разработанные методы адаптивно-встраивающихся сеток применяются в основном на структурированных сеточных моделях или на неструктурированных сетках, но с ячейками определенной формы. Кроме того, большинство реализованных алгоритмов подразумевает проведение процедуры адаптации на каждом расчетном шаге, что приводит к увеличению вычислительных затрат в процессе счета. Некоторые из предлагаемых алгоритмов подразумевают интерполяцию решения с исходной сетки на адаптивную, что также может приводить к потере точности решения.

В данной диссертационной работе представлен метод адаптивно-встраивающихся сеток для неструктурированных сеток с ячейками произвольной формы. Разработанный метод на основе анализа градиента физических величин автоматически определяет область локального измельчения, при желании пользователя, исключая призматический слой. Затем, к ячейкам внутри обозначенной области применяется реализованный алгоритм дробления, основанный на разбиении за счет добавления новых узлов, в том числе по заданному направлению. Новые элементы расчетной сетки строятся на основе используемой счетным модулем структуре данных, что позволяет переносить решение с исходной сетки на измельченную сетку без потери точности. Предлагаемый алгоритм применяется совместно с численными схемами из Главы 1, что дает возможность эффективно и с высокой точностью решать задачи транс и сверхзвуковой аэродинамики на неструктурированных сетках.

В основе метода адаптации расчетной сетки лежит алгоритм дробления ячеек, основанный на разбиении граней, образующих ячейку [Стручков и др., 2019; Struchkov et al., 2020]. Рассмотрим алгоритм на примере шестигранной ячейки.

Для формирования новых граней необходимо добавить новые узлы в центр каждой грани и на середину каждого ребра (рисунок 2.3.1(а)) исходной ячейки.

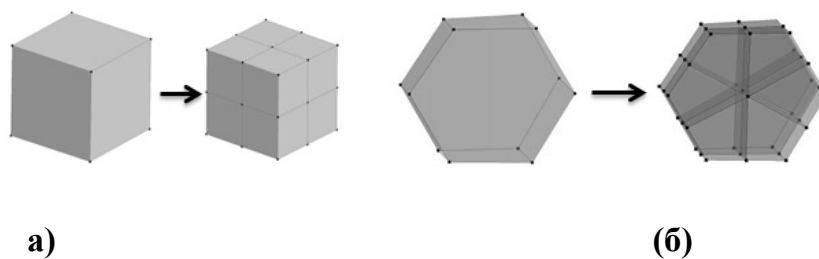


Рисунок 2.3.1 – Добавление новых узлов в центр грани и на середину ребер (слева – для шестигранной ячейки, справа – для ячейки в форме произвольного многогранника)

Для формирования новых граней внутри исходной ячейки в ее центр добавляется новый узел (рисунок 2.3.2).

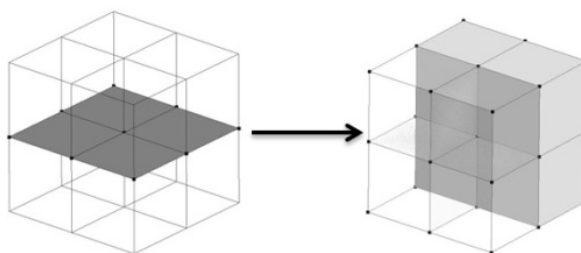


Рисунок 2.3.2 – Формирование граней внутри ячейки и образование ячеек первого уровня адаптации

В итоге из исходной ячейки имеем восемь адаптивных ячеек – ячеек первого уровня адаптации. Алгоритм также обобщается на ячейки в форме произвольного выпуклого многогранника. Пример разбиения подобной ячейки показан на рисунке 2.3.1(б).

При необходимости к сетке первого уровня алгоритм адаптации так же может быть применен, что позволяет получить сетку второго уровня. Число последующих уровней ограничено лишь минимальным размером ячейки, до которого будет выполняться разбиение. Таким образом, строится новая адаптивная сетка, имеющая области локального измельчения и используемая для дальнейшего расчета. Отметим, что при переходе к сетке следующего уровня адаптации, решение на сетке предыдущего уровня, используется как начальная инициализация, что позволяет сократить время расчета на новой сетке. Для применения алгоритма адаптации необходимо определить области измельчения ячеек сетки, для чего используют критерии адаптации [Daunenhofer& Baron, 1985; Warren et al., 1991].

Для автоматического определения области ударных волн, возникающих, например, при сверхзвуковом обтекании, одним из подходящих критериев является функция вида (2.3.1), в основе которой лежит величина градиента газодинамической величины (плотности, давления, скорости).

$$f = (V_{cell})^{\frac{2}{3}} \cdot |\nabla F|, \quad (2.3.1)$$

где V_{cell} – объем ячейки, ∇F – градиент газодинамической величины.

Величина $(V_{cell})^{2/3}$ в выражении (2.3.1) применяется для оценки геометрического размера ячейки и позволяет учесть зависимость значения критерия f от ее объема. Таким образом, в сочетании со значением градиента газодинамической величины, максимальное значение критерия будет достигаться в ячейках с наибольшим объемом и высоким значением градиента, что обеспечит попадание в область локального измельчения крупных ячеек в области сильного изменения газодинамических величин (например, ударная волна). Минимальное значение критерия f характерно для области с плавным изменением газодинамических величин и достигается в ячейках с наименьшим объемом и низким значением градиента, что приведет к их исключению из области локального измельчения.

В данной работе в качестве газодинамической величины F используется плотность или давление. Эти величины наиболее подходящие для выделения областей ударной волны, так как их градиент в указанной области будет принимать максимальное значение.

Рассмотрим применение критерия на примере автоматического выделения областей скачка уплотнения и фронта ударной волны при трансзвуковом обтекании аэродинамического профиля NACA0012 (параграф 1.3) и сверхзвуковом течение в канале с клином (параграф 1.3). Картины течений, формирующихся при обтекании данных объектов, представлены на рисунке 2.3.3.



Рисунок 2.3.3 – Поле числа Маха при трансзвуковом обтекания профиля NACA0012 (слева) и поле числа Маха при сверхзвуковом течение в канале с клином (справа)

При обтекании профиля NACA0012 происходит формирование отрывной зоны на подветренной его стороне (область А, рисунок 2.3.3 (слева)). Хотя ударная волна является криволинейной, по своему характеру у поверхности профиля она соответствует нормальному скачку, переводящему сверхзвуковое течение в дозвуковое. Качественное описание ударной волны и правильное определение положения ее фронта (область Б) повышает точность решения подобного класса задач, одной из целей которого является определение взаимосвязи структуры поля течения вблизи профиля и аэродинамических характеристик.

При сверхзвуковом течении в канале с клином образуется присоединенный скачок уплотнения, приводящий к формированию ударно-волновой структуры потока в канале (область В, рисунок 2.3.3 (справа)). С точки зрения численного моделирования в областях таких структур (область Г, рисунок 2.3.3 (справа)) потока рекомендуется строить подробную расчетную сетку, что позволит уменьшить степень «размазывания» фронтов и повысить точность численного решения.

На рисунках 2.3.4-2.3.5 показано поле F критерия (2.3.1) для задачи трансзвукового обтекания профиля и сверхзвукового обтекания клина.



Рисунок 2.3.4 – Трансзвуковое обтекания профиля NACA0012, критерий для плотности (слева) и давления (справа)



Рисунок 2.3.5 – Сверхзвуковое обтекание клина, критерий для плотности (слева) и давления (справа)

Видно, что область максимального значения критерия (2.3.1) (области с максимальным белым оттенком), как в случае использования плотности, так и в случае использования давления, совпадает с положением скачка уплотнения и фронта ударной волны. При этом, результат применения критерия на основе плотности и давления идентичен. Область с максимальным значением этого критерия рассматривается как область для локального измельчения расчетной сетки.

При продолжении счета на измельченной сетке положение фронта уточняется, фронт может смещаться и уходить из области локального измельчения. Для исключения этого необходимо в качестве адаптивных ячеек пометить не только ячейки с сильным изменением газодинамических величин, но и соседних с ними ячеек «первого-второго» слоя, что позволяет расширить область локального измельчения. Такой подход делает возможным «удерживать» фронт области с высокими градиентами в границах локального области измельчения.

Далее на рисунках 2.3.6-2.3.7 представлена адаптивная сетка, полученная в результате применения алгоритма адаптации с выделением области измельчения по критерию на основе величины давления.

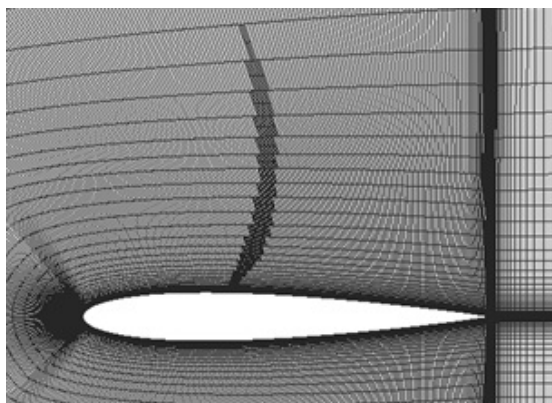


Рисунок 2.3.6 – Локальное измельчение расчетной сетки (профиль NACA0012)

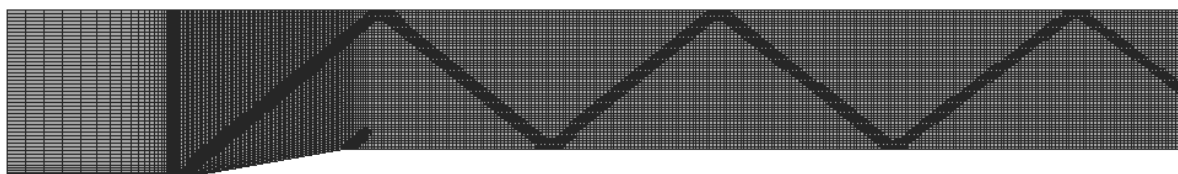


Рисунок 2.3.7 – Локальное измельчение расчетной сетки (канал с клином)

Таким образом, в новой сеточной модели локальное измельчение ячеек построено в области фронта ударной волны. Рассмотрим применение метода статической адаптации на примере решения задачи сверхзвукового обтекания остроконечного конуса, из носовой части которого происходит вдув встречной струи газа.

Согласно [Aso et al. 2005, 2006, 2008; Cheng et al., 2007] практическим методом снижения величины силы лобового сопротивления, действующей на летательный аппарат, движущейся в плотных слоях атмосферы, является впрыск встречной струи в набегающий воздушный поток. Так же этот подход применяется для снижения теплового нагрева носовой части объекта за счет того, что вблизи носовой части возникает холодная область рециркуляции [Aso et al. 2005, 2006, 2008; Cheng et al., 2007]. В свою очередь при увеличении интенсивности вдуваемой струи, величина силы лобового сопротивления уменьшается, так как область рециркуляции низкого давления увеличивается и отошедшая ударная волна, главным образом являющаяся причиной лобового сопротивления, становится слабее. На рисунке 2.3.8 (слева) представлена схема течения, формируемого вблизи затушенной носовой части объекта. В целом, форма носа может быть так же остроконечной (рисунок 2.3.8 (справа)), в этом случае структура течения аналогична.

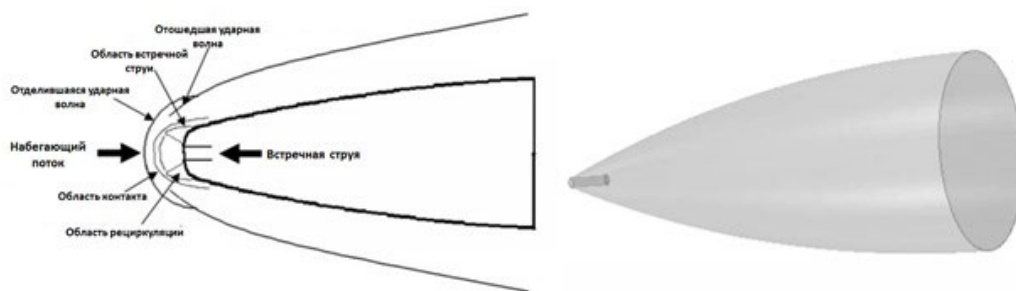


Рисунок 2.3.8 – Структура потока вблизи тела (слева), расчетная модель (справа)

Рассмотрим влияние алгоритма адаптации на получаемое значение коэффициента силы лобового сопротивления при сверхзвуковом обтекании остроконечной модели (рисунок 2.3.8 (справа)) и сравним результаты с экспериментальными данными [Aso et al. 2005]. Расчетная область обладает центральной осевой симметрией и представляет собой конусовидный объект диаметром 40 мм и длиной 85 мм. Количество ячеек в начальной неструктурированной расчетной сетке (рисунок 2.3.9) составляет $\sim 732\ 000$.

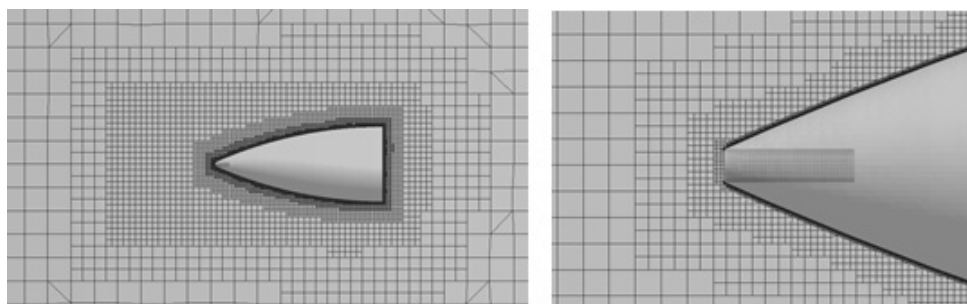


Рисунок 2.3.9 – Расчетная сетка (общий вид, вблизи носовой части)

При построении сетки задана общая область локального измельчения вблизи тела, области для более точной детализации возникающих ударных волн не задавались. Для расчета обтекания на внешней границе задан набегающий поток воздуха с числом Маха 3.98, температурой 96.9°K , давлением 9334.7 Па и углом атаки 0° .

Навстречу потоку из зазора круглого сечения радиусом 1 мм, расположенного в носовой части модели подается азот с параметрами потока: число Маха 1, полная температура 300°K , давление 729028.867 Па.

На рисунке 2.3.10 представлено поле числа Маха вблизи поверхности всего объекта и в области носовой части. Видно, что первоначальная сетка обладает малой сеточной разрешимостью для достаточной детализации возникающих ударных волн и структура течения сильно «замазана». Так же о недостаточной сеточной разрешимости говорит полученное значение коэффициента силы лобового сопротивления – 0.046, отклонение которого от экспериментальных данных составляет 17%.

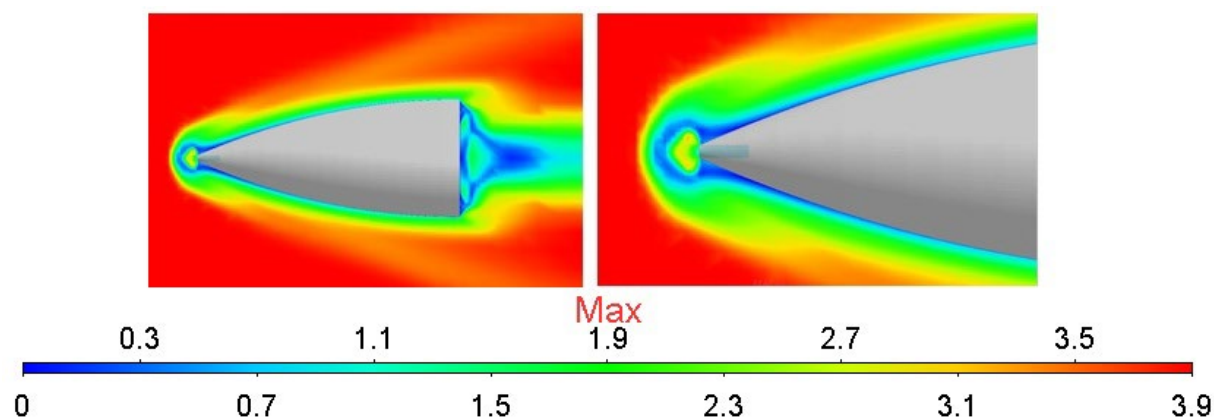


Рисунок 2.3.10 – Поле числа Маха, начальная сетка

После применения алгоритма адаптации расчетная сетка стала характеризоваться наличием областей локального измельчения вдоль фронта ударных волн. Всего для получения решения требуемой точности (отклонение от экспериментальных данных $\sim 10\%$) было выполнено три уровня адаптации расчетной сетки. Поле числа Маха для сетки третьего уровня адаптации представлено на рисунке 2.3.11.

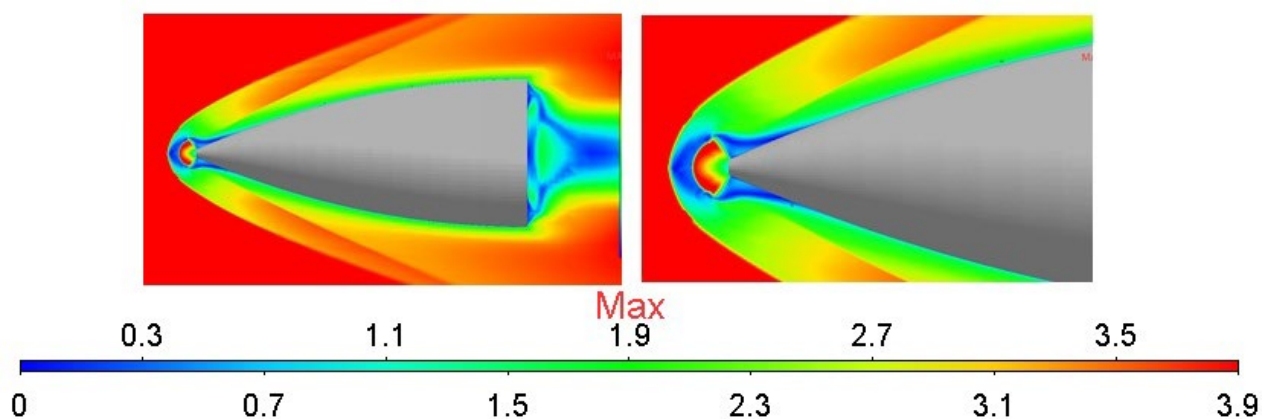


Рисунок 2.3.11 – Поле числа Маха, сетка третьего уровня адаптации

Из рисунка 2.3.11 видно, что сетка третьего уровня адаптации позволяет качественно прописать структуру течения вблизи объекта. В системе четко можно выделить фронт отделившейся и отошедшей ударной волны, а также область рециркуляции низкого давления. Как следствие лучшей детализации структуры течения, полученное значение коэффициента силы лобового сопротивления имеет отклонение от экспериментальных данных равное 10.2 %. Построенные сетки для каждого из уровней адаптации представлены на рисунке 2.3.12.

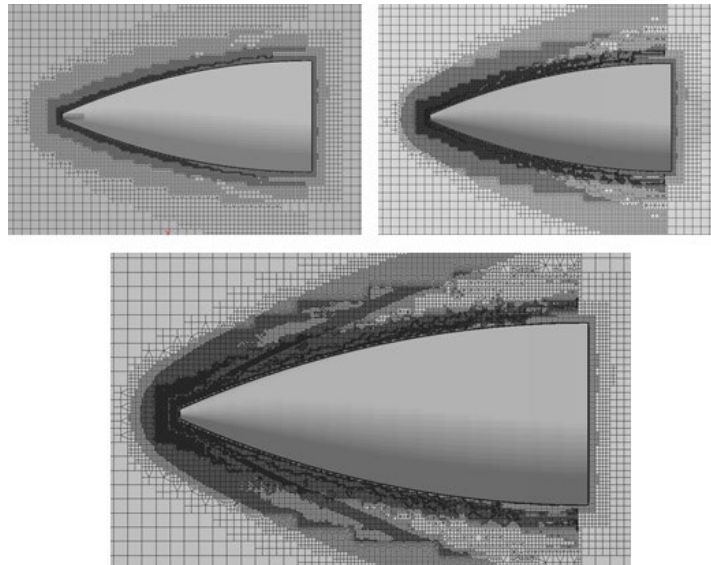


Рисунок 2.3.12 – Сетки вблизи объекта, уровень адаптации 1, 2 и 3 (слева на право)

Видно, что локальное измельчение проходит именно в тех областях, где возникает ударная волна. В результате разбиения исходных ячеек формируются произвольные многогранники.

Для оценки эффективности метода адаптации, была построена сетка, сопоставимая с сеткой 2-го уровня адаптации по сеточному разрешению. Для этого вблизи обтекаемого тела необходимо было поставить блок в виде конуса для построения локального измельчения, размер ячейки в блоке определялся параметрами сетки 2-го уровня адаптации. Построенная сетка представлена на рисунке 2.3.13, число ячеек составляет ~10.2 млн.

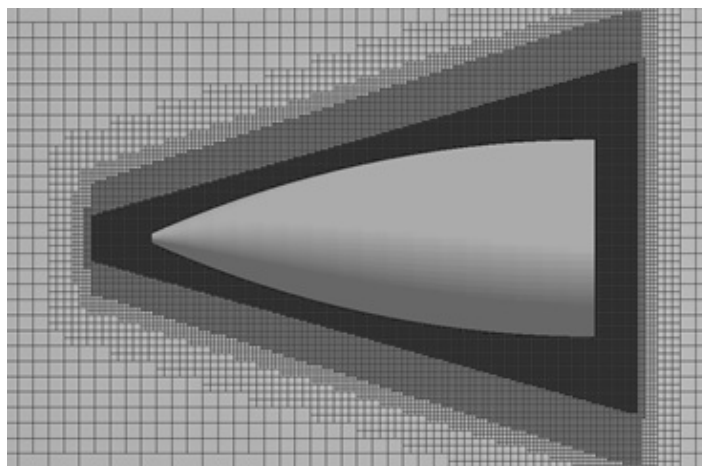


Рисунок 2.3.13 – Сетки вблизи объекта

На построенной сетке был проведен расчет, результаты которого отражены в таблице 2.3.1 в виде полученного значения коэффициента силы лобового сопротивления, в ней же представлено сравнение с экспериментальными данными остальных расчетов.

Таблица 2.3.1. Значение коэффициента силы лобового сопротивления

Сетка, расчет	Значение коэффициента силы лобового сопротивления	Отклонение, в %
Расчет (исходная сетка)	0.0463	17.2
Расчет (сетка 1-го уровня адаптации)	0.0477	14.7
Расчет (сетка 2-го уровня адаптации)	0.0484	13.4
Расчет (сетка 3-го уровня адаптации)	0.0502	10.2
Расчет (подробная сетка)	0.0485	13.7
Эксперимент	0.056	–

Можно сделать вывод, что на каждом из уровней адаптации полученная величина погрешности в определении коэффициента силы лобового сопротивления уменьшалась. Кроме того, результат расчета на мелкой сетке и сетке 2-го уровня адаптации обладает сопоставимой величиной погрешности, однако, при этом подробная сетка имеет в 1.5 раза больше число ячеек. Если рассматривать сетку, обладающую сеточной разрешимостью сопоставимой с сеткой 3-го уровня адаптации, то число ячеек в сетке будет ~53 млн, что заметно увеличивает вычислительные затраты, в то время как сетка 3-го уровня адаптации имеет ~13 млн ячеек (таблица 2.3.2).

Таблица 2.3.2. Размерность расчетных сеток

Сетка	Число ячеек	
	Алгоритм адаптации	Автоматическая сетка
Базовая сетка	731 116	731 116
Сетка 1-го уровня	1 330 944	не строилась
Сетка 2-го уровня	5 912 204	10 000 000
Сетка 3-го уровня	12 861 227	53 000 000

Для справедливости отметим, что число ячеек, полученных в сетке при работе сеточного генератора с использованием локальных блоков измельчения, напрямую зависит от компетентности инженера при задании параметров блока. Зачастую блок задается в виде геометрических примитивов (конус, сфера, цилиндр, параллелепипед). При этом выделить фронт ударной волны сложной геометрической формы без построения локального измельчения вне фронта – задача трудновыполнимая. Именно поэтому число ячеек этих сеток достаточно велико. На фоне этого обстоятельства преимущество адаптивных сеток выражено наиболее ярко.

2.4 Моделирование сверхзвукового обтекания с использованием многосеточной инициализации и статической адаптации на произвольных сетках

Рассмотрим сверхзвуковое обтекание осесимметричного тела потоком вязкого сжимаемого газа. Геометрия исследуемого объекта показана на рисунке 2.4.1. Длина объекта, L , составляет 17,667 дюйма (0.44 м), диаметр – 1,4 дюйма (0.035 м) [Waithe, 2013].



Рисунок 2.4.1 – Осесимметричное тело

Результаты расчета сравнивались с данными, полученными в аэродинамической трубе NASA Ames 9x7 Supersonic Wind Tunnel при обтекании макета объекта. В эксперименте оценивалось нормированное изменение статического давления вдоль характерной линии на расстоянии 0,54 м под объектом (рисунок 2.4.2) [Waithe, 2013].

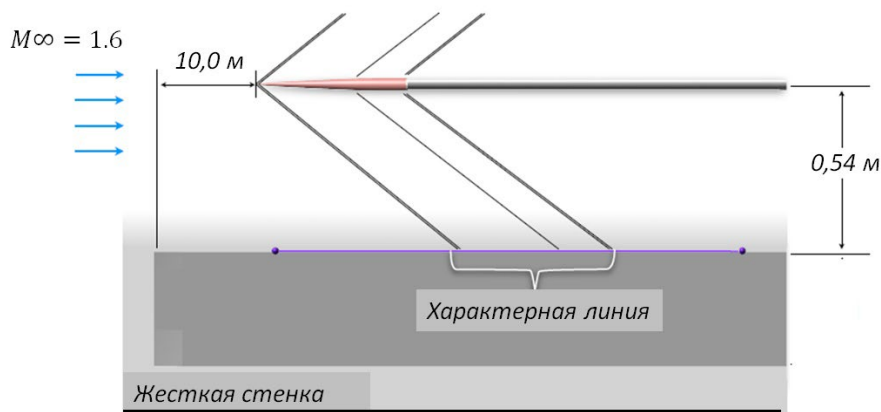


Рисунок 2.4.2 – Схема проведения эксперимента

Согласно эксперименту, обтекание проводилось при числе Рейнольдса $6,42e6$, с параметрами набегающего потока: число Маха 1.6, температура 273°K, молекулярная вязкость $1,85e-5$ кг/(м*с), давление 1 атм. Поток натекает с нулевым углом атаки.

Для расчета данной задачи были построены неструктурированные расчетные сетки:

- Сетка, состоящая из усеченных шестигранников, с числом ячеек 2.5 млн. (рисунок 2.4.3) – характерный размер ячеек в ядре сетки составляет 0.025 м, в блоке измельчения 0.006 м;

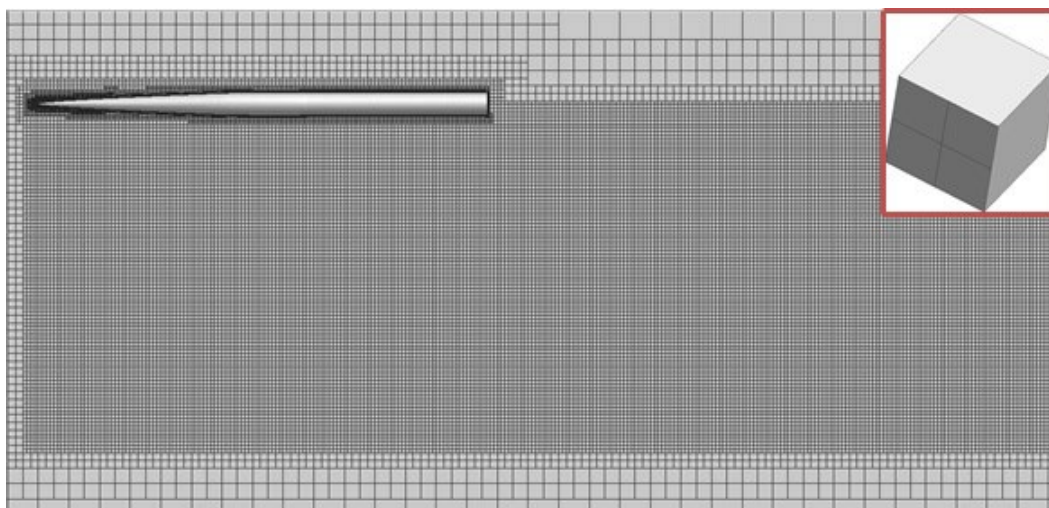


Рисунок 2.4.3 – Расчетная область

- Сетка из многогранников, с общим числом ячеек 5,3 млн – с аналогичными характерными размерами (рисунок 2.4.4);

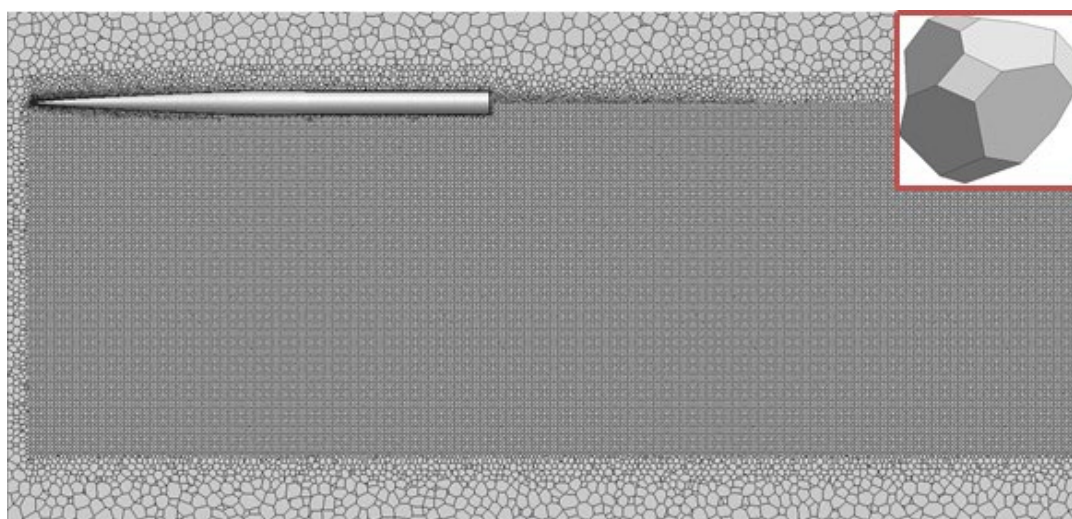


Рисунок 2.4.4 – Расчетная область

Размер объекта в расчетной сетке соответствует размеру модели, используемой при обтекании в аэродинамической трубе. Вблизи поверхности объекта имеется призматический слой – 0,005 м, в 15 ячеек толщиной. Внешняя граница расчетной области отдалена от объекта на значительное расстояние (10 м) для исключения ее влияния на результат обтекания.

Для воспроизведения условий эксперимента на внешней границы расчетной области задавался «свободный поток» с соответствующими параметрами. Поверхность объекта задавалась «жесткой стенкой».

Задача решалась на установление течения. Математическая модель решения основана на использовании связанного типа решателя, многосеточной инициализации,

применении неявной разностной схемы, схемы расчеты конвективных потоков AUSMPW, модели турбулентности Спаларта-Алмараса. Применение многосеточной инициализации дало решение, показанное на рисунке 2.4.5. Далее оно использовалось при расчете на базовой сетке.

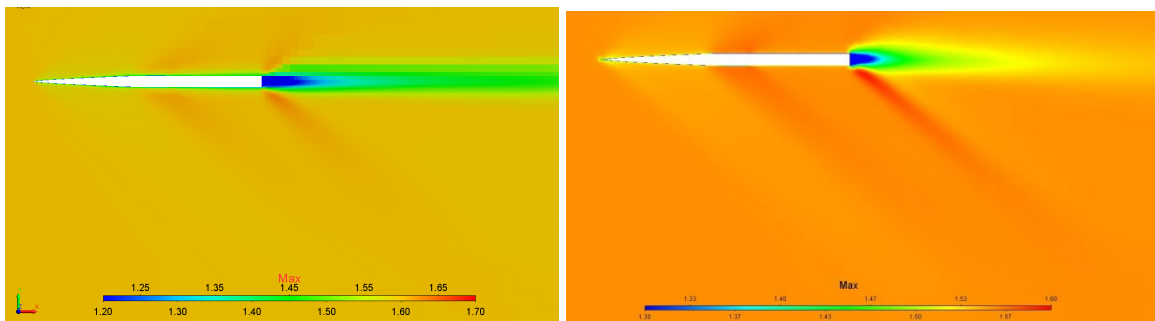


Рисунок 2.4.5 – Поле числа Маха, инициализация (сетка усеченные шестигранники слева, многогранники – справа)

Задача решалась на установление, в результате чего было получено следующее решение (рисунок 2.4.6).

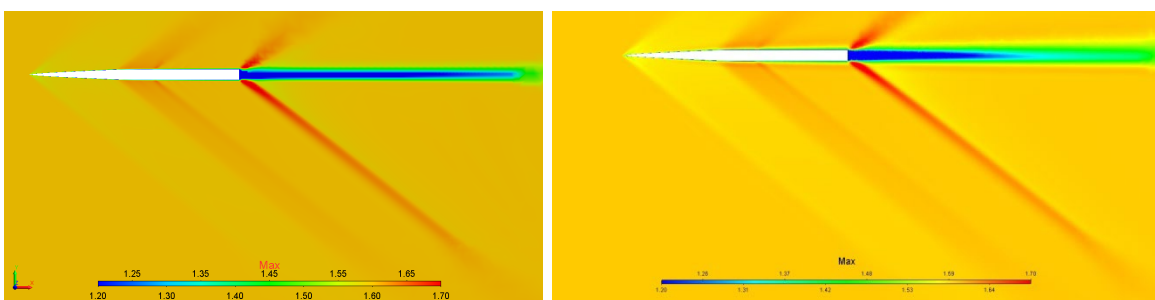


Рисунок 2.4.6 – Поле числа Маха, стационарное решение (сетка усеченные шестигранники слева, многогранники – справа)

Видно, что при заданном режиме обтекания для обеих сеточных моделей в потоке формируется ударная волна (так называемая, *N*-волна), отходящая от частей объекта. Решение сошлось:

- с использованием многосеточной инициализацией за 400 итераций, в то время как в расчете без нее – за 550 итераций на сетке из усеченных шестигранников;
- с использованием многосеточной инициализацией за 790 итераций, в то время как в расчете без нее – за 975 итераций на сетке из усеченных шестигранников;

Таким образом, ускорение от использования многосеточной инициализации, с учетом затраченного на нее время, составило более 20% для обоих случаев.

Далее, с использованием критерия по величине давления (одинакового для обеих сеточных моделей) была выполнена адаптация базовой сетки. Полученное решение на адаптивной сетке первого уровня показано на рисунке 2.4.7.

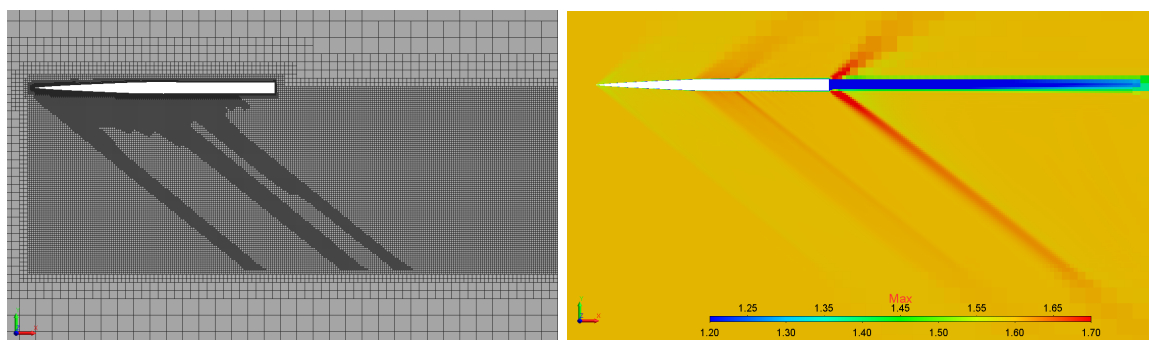


Рисунок 2.4.7 – Поле числа Маха, сетка первого уровня адаптации (усеченные шестигранники)

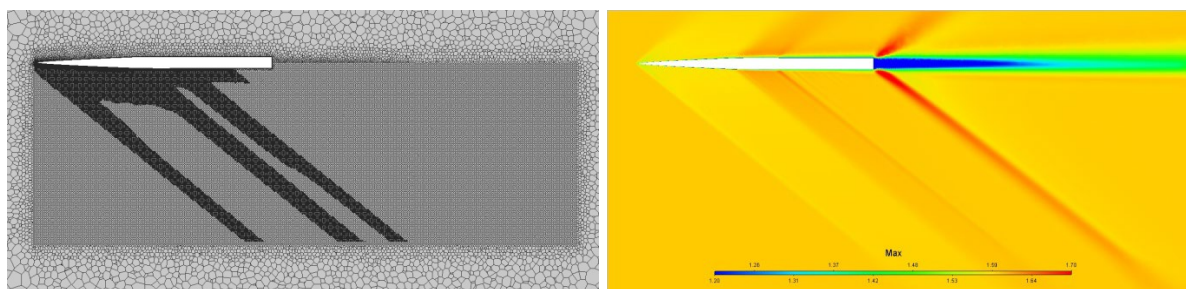


Рисунок 2.4.8 – Поле числа Маха, сетка первого уровня адаптации (многогранники)

Затем был выполнен второй уровень адаптации. Здесь отметим, что в случае ячеек в форме многогранника была получена сетка с числом ячеек более 90 млн. В то время как для сетки из усеченных шестигранников число ячеек существенно меньше (21,4 млн). Это объясняется тем, что в алгоритме адаптации число дочерних ячеек определяется числом вершин адаптивной ячейки – что в случае ячеек-многогранников приводит к резкому увеличению числа элементов. В связи с этим дальнейший расчет был продолжен лишь на сетке из усеченных шестигранников (решение и сетка для третьего уровня представлены на рисунке 2.4.9).

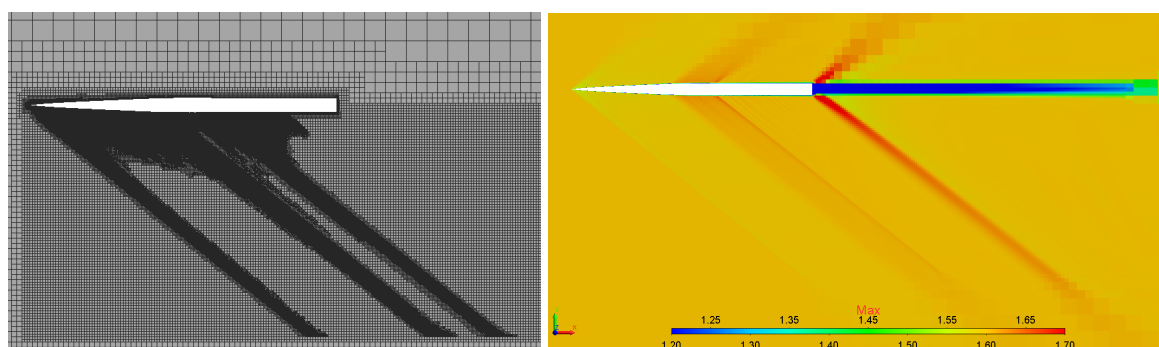


Рисунок 2.4.9 – Поле числа Маха, сетка третьего уровня адаптации

Для полученных сеток 1, 2 и 3 уровней адаптации характерный размер ячеек в зонах локального измельчения составлял 0.003 м, 0.0015 м, 0.0005 м соответственно.

По результатам каждого расчета оценивалось нормированное изменение статического давления вдоль характерной линии на расстоянии 0.65 м под объектом по схеме на рисунке 2.4.2 [Waithe, 2013].

Нормирование выполнялось на величину давления с внешней границы – Pref (1 атм.). График полученных результатов в сравнении с экспериментальными данными представлен на рисунках 2.4.10-2.4.11.

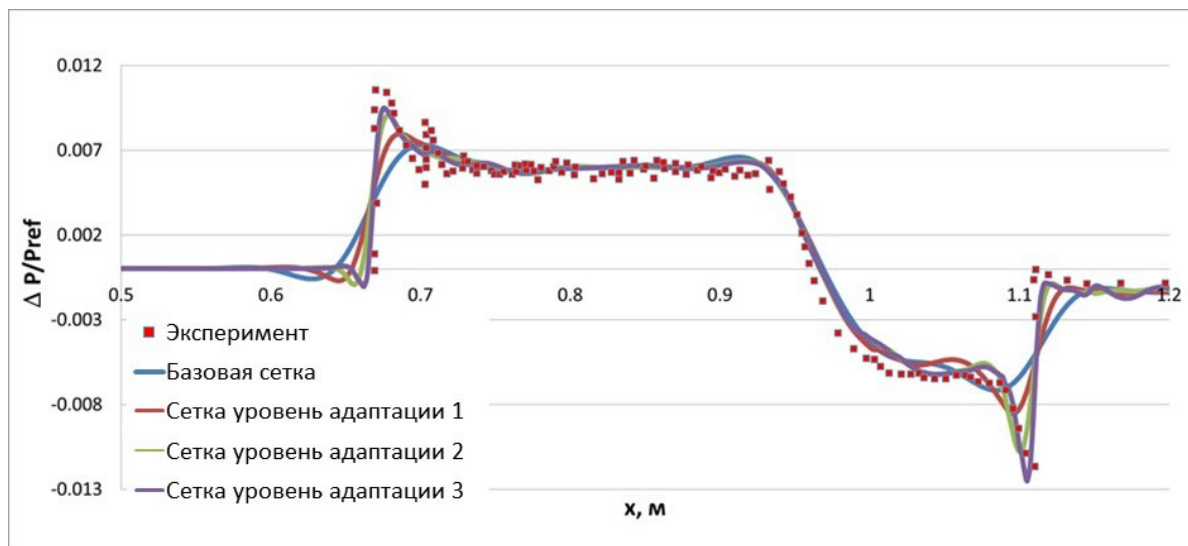


Рисунок 2.4.10 – Нормированное изменение статического давления (усеченные шестигранники)

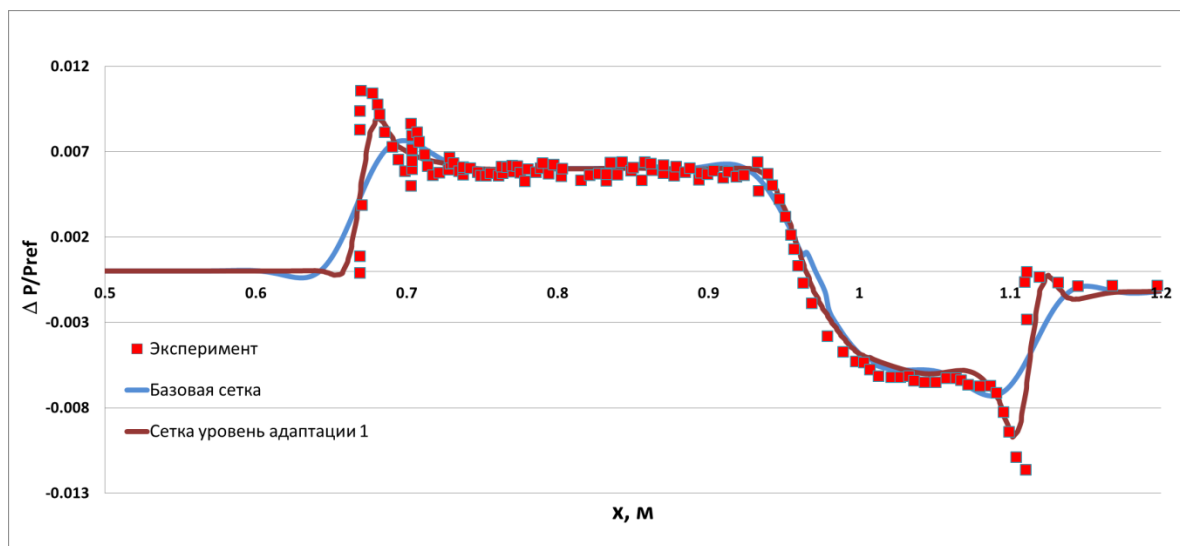


Рисунок 2.4.11 – Нормированное изменение статического давления (многогранники)

График показывает, что в результате применения алгоритма адаптации полученное решение становится более точным и приближается к экспериментальным данным, что говорит о сеточной сходимости. За счет построения локального измельчения область фронта ударной волны разрешается с большей точностью. Следующие уровни адаптации

для сетки из усеченных шестигранников (после 3го уровня) не давали уточнения результатов. Характеристики используемых сеток представлены в таблице 2.4.1.

Таблица 2.4.1. Характеристики расчетных сеток

Сетка	Число ячеек	
	Усеченные шестигранники	Многогранники
Базовая сетка	2,5 млн	5,3 млн
Сетка 1-го уровня адаптации	4,9 млн	22,6 млн
Сетка 2-го уровня адаптации	21,4 млн	92,4 млн
Сетка 3-го уровня адаптации	67,5 млн	Не строилась

Таким образом, по результатам данной задачи можно сделать следующие выводы:

1. Алгоритмы многосеточной инициализации и статической адаптации применимы на сетках с ячейками произвольной формы;
2. Применение метода многосеточной инициализации повышает скорость сходимости решения до 20%;
3. Метод статической адаптации обеспечивает эффективное построение расчетной модели в автоматическом режиме и позволяет достичь сеточной сходимости решения;
4. Размер сеточной модели зависит от формы ячеек – в случае многогранников число ячеек увеличивается заметно быстрее.

Вопрос эффективности построения сеточных моделей методом статической адаптации исследуется в следующей задаче при моделировании течения из биконического сопла. В задаче внешней аэродинамики для сложной формы ударной волны точно подобрать геометрический объект при построении области локального измельчения «вручную» – достаточно сложно, а в случае течения из сопла – есть возможность обозначить границы особенностей структуры потока, и применить геометрические формы для задания области локального измельчения.

2.5 Исследование ударно-волновой структуры потока при сверхзвуковом истечении из сопла

Успешное создание качественного авиационного двигателя тесно связано с задачей получения характеристик течения реактивной струи, возникающей при работе двигателя летательного аппарата. Ввиду дорогостоящего проведения натурального эксперимента, актуальным становится исследование турбулентных струй с помощью численного моделирования.

В данном разделе на примере численного моделирования струйного сверхзвукового течения из сопла на основе RANS подхода с SST моделью турбулентности рассмотрена возможность повышения точности расчета за счет использования эффективной сеточной модели, полученной в результате применения статической адаптации расчетной сетки.

Рассматривается течение сверхзвуковой струи для биконического сопла, геометрия которого показана на рисунке 2.5.1 [Liu Junhui et al., 2009]. Для заданных условий задачи в струйном течении формируется серия волн сжатия-расширения, называемых бочками. При использовании сеточной модели, не обладающей достаточным разрешением, бочки не имеют точных границ, и передача особенностей структуры течения не предоставляется возможной. Предлагаемый в данной работе метод адаптации сетки рассматривается как инструмент для построения эффективной сеточной модели, решение на которой имеет более высокую точность.

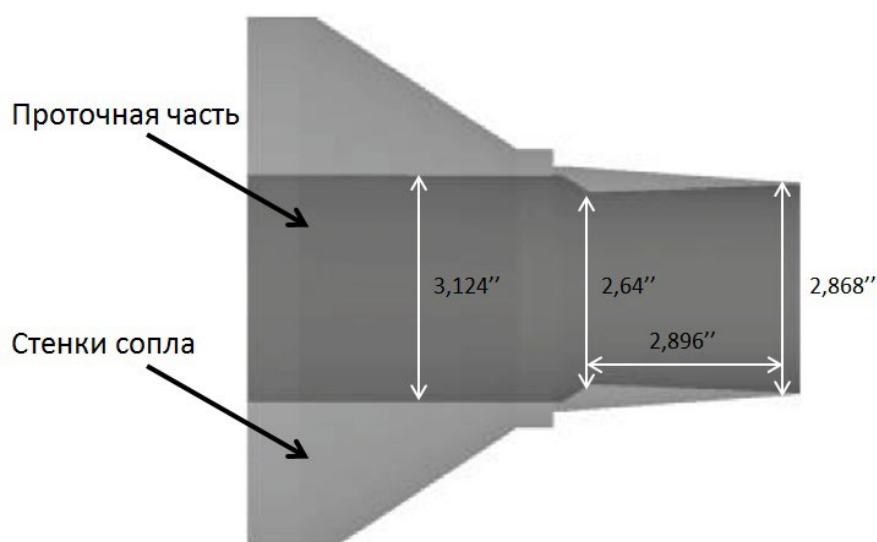


Рисунок 2.5.1 – Геометрия и общий вид сопла

На рисунке темная область – это проточная часть сопла, а светлая (серая) область – стенка сопла. Диаметры на входе в сопло, горловине сопла и на выходе из сопла составляют 3,124, 2,64 и 2,868 дюйма соответственно. Кромка сопла имеет толщину 0,02

дюйма. Расчетное число Маха для рассматриваемого сопла составляет 1,56. Расчетная область и схема расстановки граничных условий показана на рисунке 2.5.2.

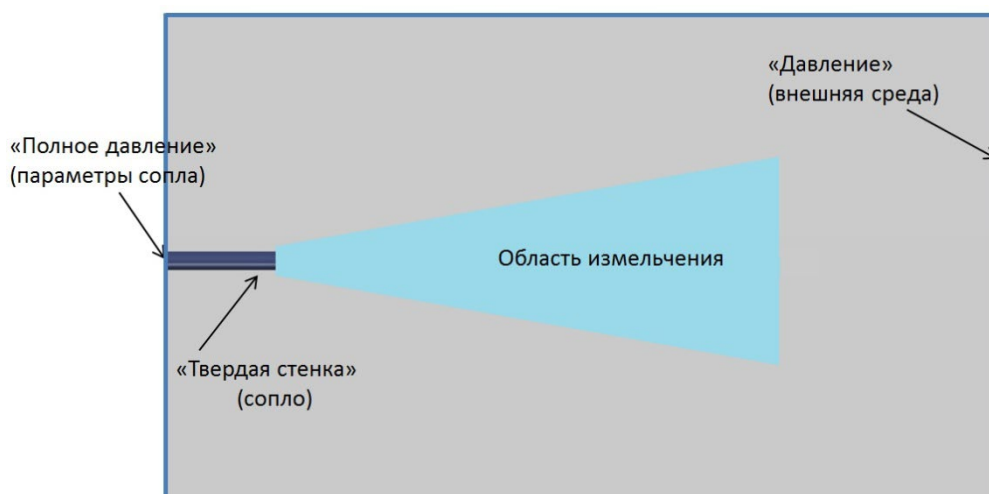


Рисунок 2.5.2 – Общий вид расчетной области и схема граничных условий

Для задачи были построены неструктурированные расчетные сетки на основе усеченных шестигранников (сетка А, рисунок 2.5.3) и на основе многогранников (сетка Б, рисунок 2.5.4). Общее число ячеек в сетке А составляет 2,737 млн, а в сетке Б – 2,959 млн. (рисунок). Область локального измельчения в обеих расчетных сетках находится вокруг среза сопла и продолжается вдоль оси факела струи вниз по течению. В качестве блока локального измельчения был задан конус, радиусы которого равны 0,07м и 0,5м, длина 2,4м, а локальный размер ячейки равен 0,0025м. В процессе счета в области локального измельчения применяются два уровня адаптации сетки под особенности течения для оценки зависимости основных характеристик струи от размера расчетной ячейки сетки.

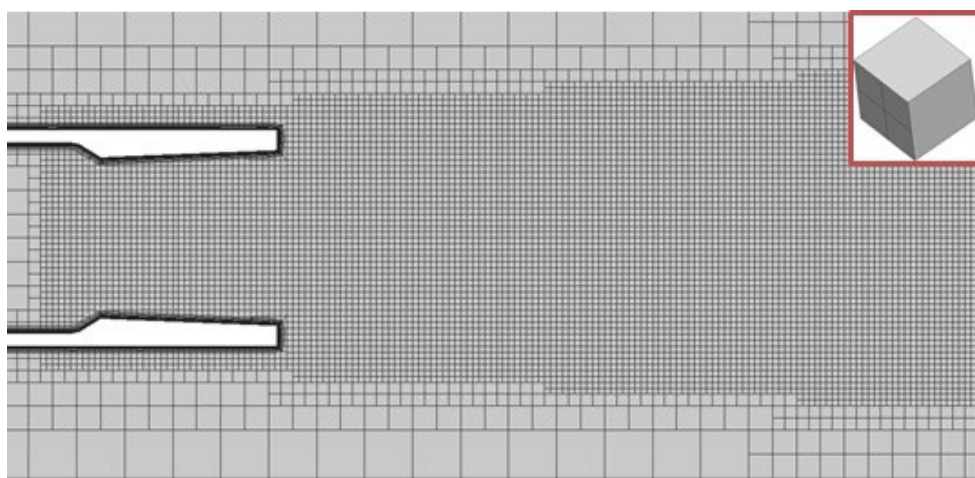


Рисунок 2.5.3 – Базовая сетка А

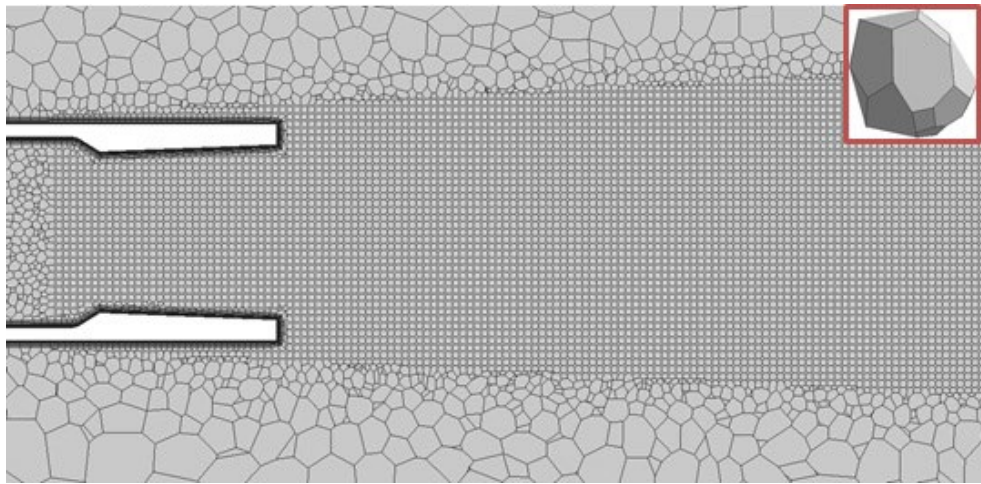


Рисунок 2.5.4 – Базовая сетка Б

В качестве граничного условия на входе в сопло было задано полное давление и полная температура, в соответствии с условиями эксперимента [Liu Junhui et al., 2009]. Для проведения исследования был выбран режим с холодным истечением струи (300°K) и параметрами, представленными в таблице 2.5.1.

Таблица 2.5.1. Параметры газа

T_0, K	$P_0, \text{Па}$	M_j	M_a	$U_j, \text{м/с}$	T_j, K	Re
300	400000	1,56	1,28	444	202	4.148×10^6

На рисунках 2.5.5-2.5.10 показаны скорость и плотность для параметров течения из таблицы 2.5.1 для сеток А и Б. За срезом сопла наблюдается цепочка бочек (чередование ударных волн), потенциальное ядро струи заканчивается на расстоянии $12D$ (D – диаметр выхода сопла). Кроме того, видно, что волны сжатия и расширения начинаются внутри сопла, немного ниже по потоку от горла сопла.

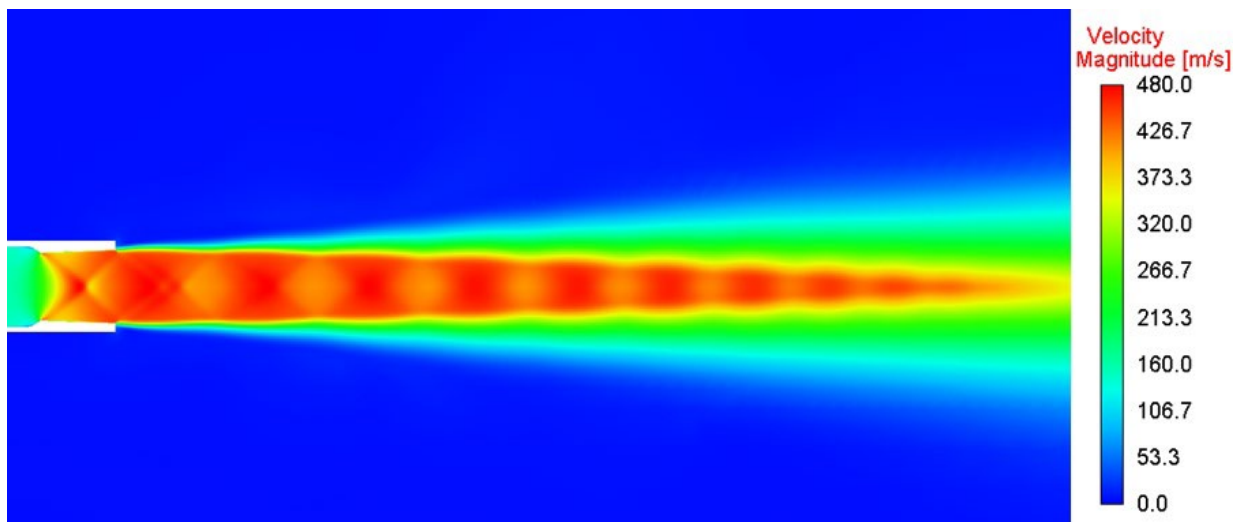


Рисунок 2.5.5 – Поле скорости (сетка А)

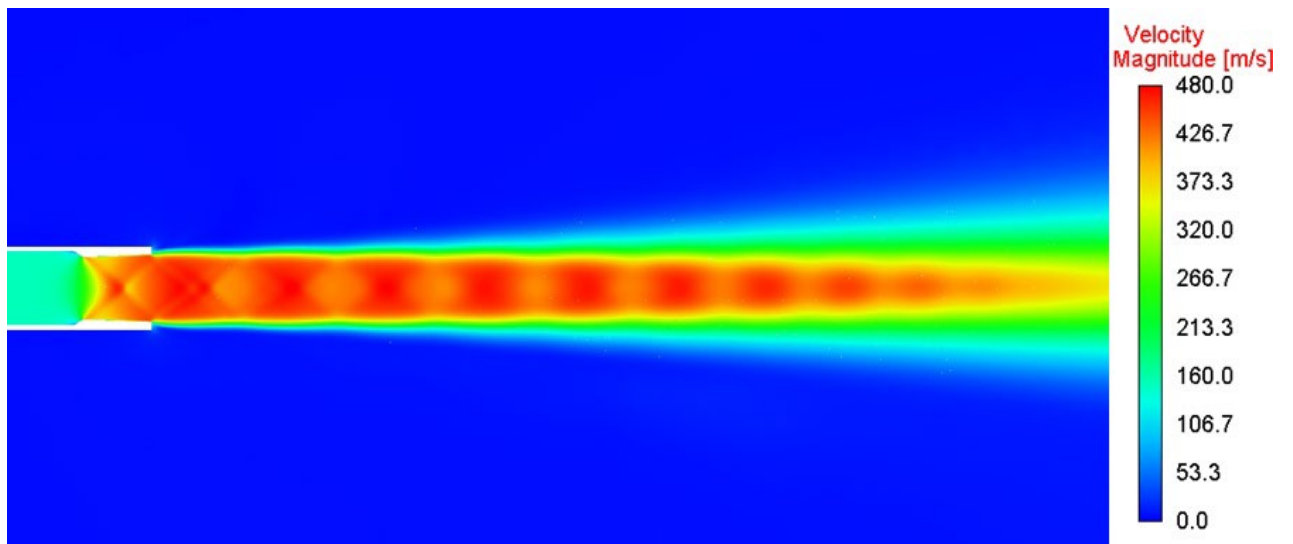


Рисунок 2.5.6 – Поле скорости (сетка Б)

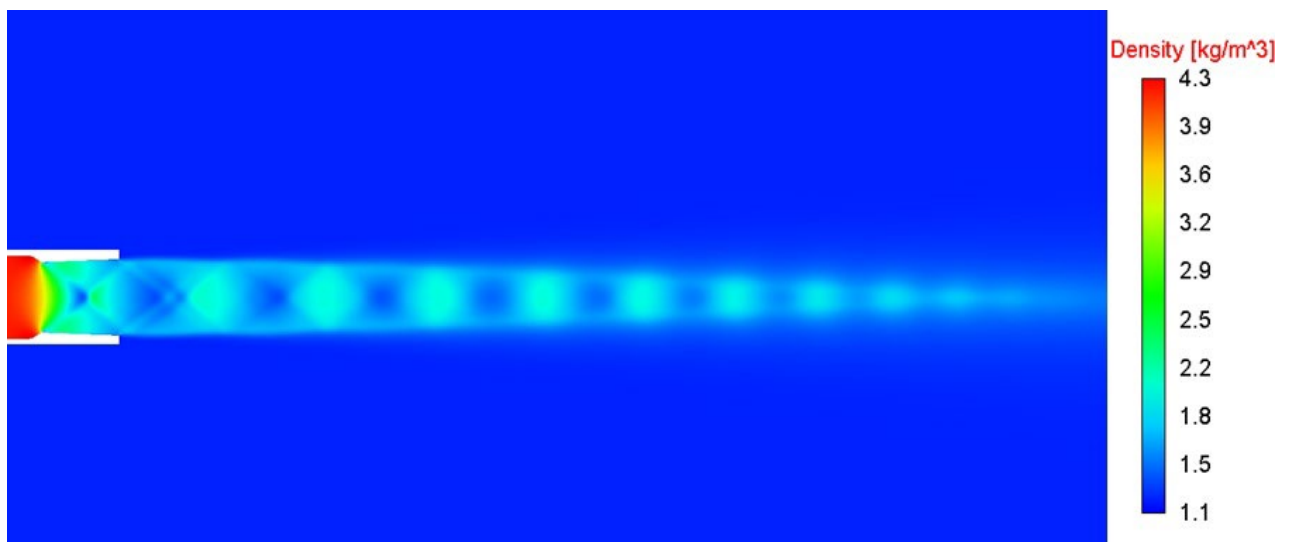


Рисунок 2.5.7 – Поле плотности (сетка А)

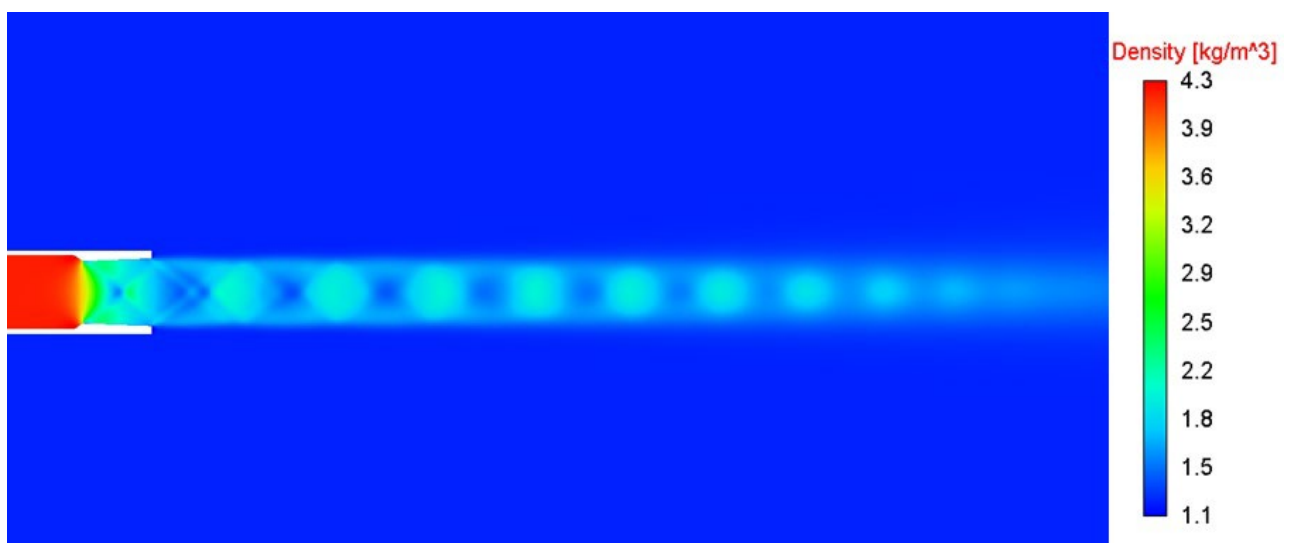


Рисунок 2.5.8 – Поле плотности (сетка Б)

Распределения статического давления вблизи среза сопла показаны на рисунке 9.

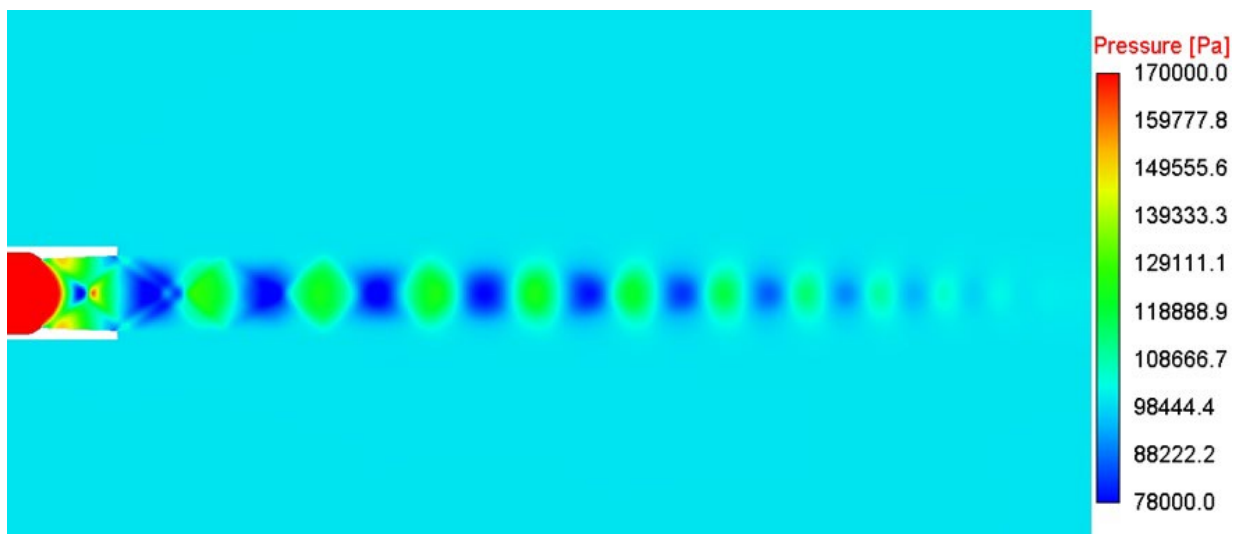


Рисунок 2.5.9 – Статическое давление (сетка А)

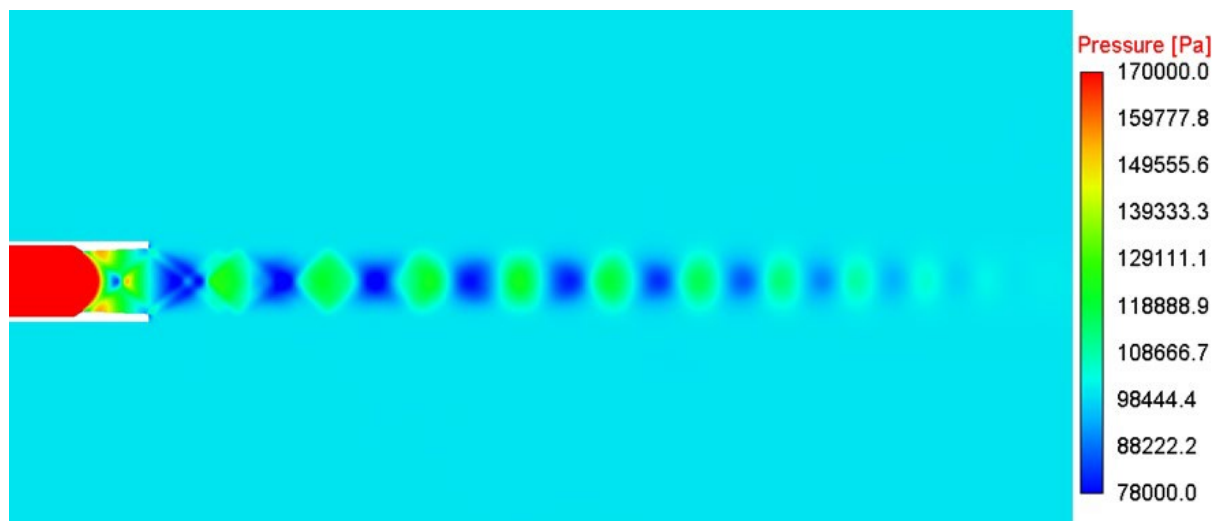


Рисунок 2.5.10 – Статическое давление (сетка Б)

Согласно [Munday et al., 2011], ударно-волновая структура сверхзвуковой струи схематично показана на рисунке 2.5.11.

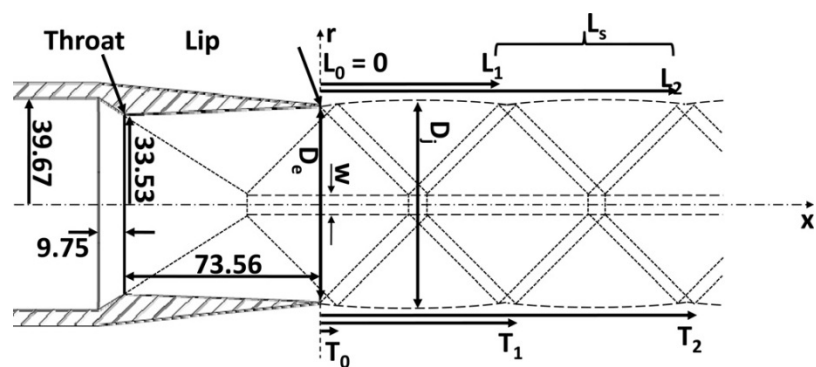


Рисунок 2.5.11 – Структура сверхзвуковой струи

Связь длины второй бочки (L_s) и диаметра полностью расширенной струи (D_j) выражается следующими формулами:

$$\frac{L_s}{D_j} = \frac{\pi}{2,40483} (M_j^2 - 1)^{1/2}, \quad (2.5.1)$$

$$\frac{L_s}{D_j} = 1,1 (M_j^2 - 1)^{1,17/2}, \quad (2.5.2)$$

где, (2.5.1) – модель Prandtl–Pack [Pack, 1950.], (2.5.2) – уточнение Norum и Seiner [Norum&Seiner, 1980] для C-D сопла.

Однако базовая сетка не обладает достаточным сеточным разрешением для измерения геометрических характеристик струи и нахождения связи длины второй бочки и диаметра струи (рисунок 2.5.12-2.5.13).

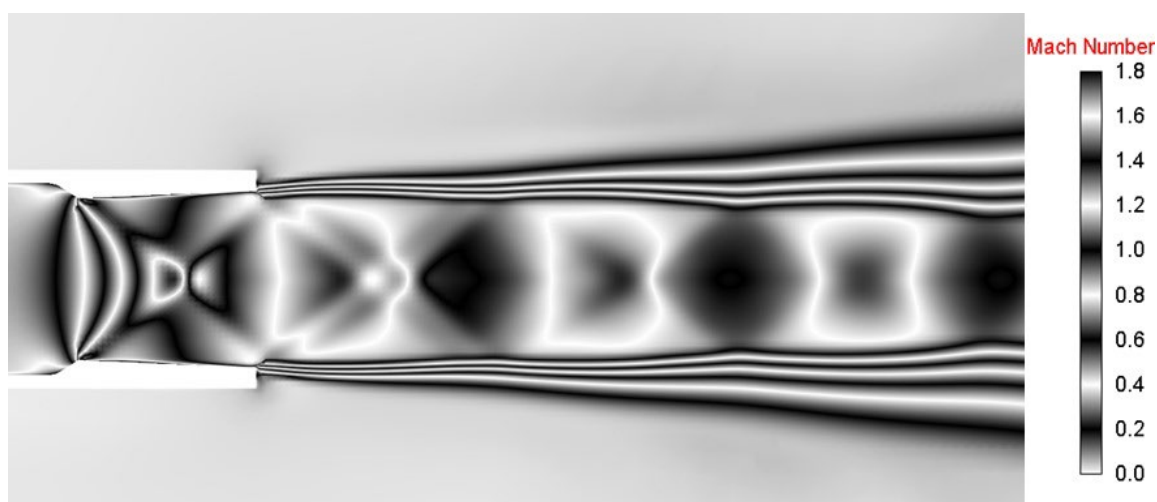


Рисунок 2.5.12– Распределение числа Маха, ч/б палитра (сетка А)

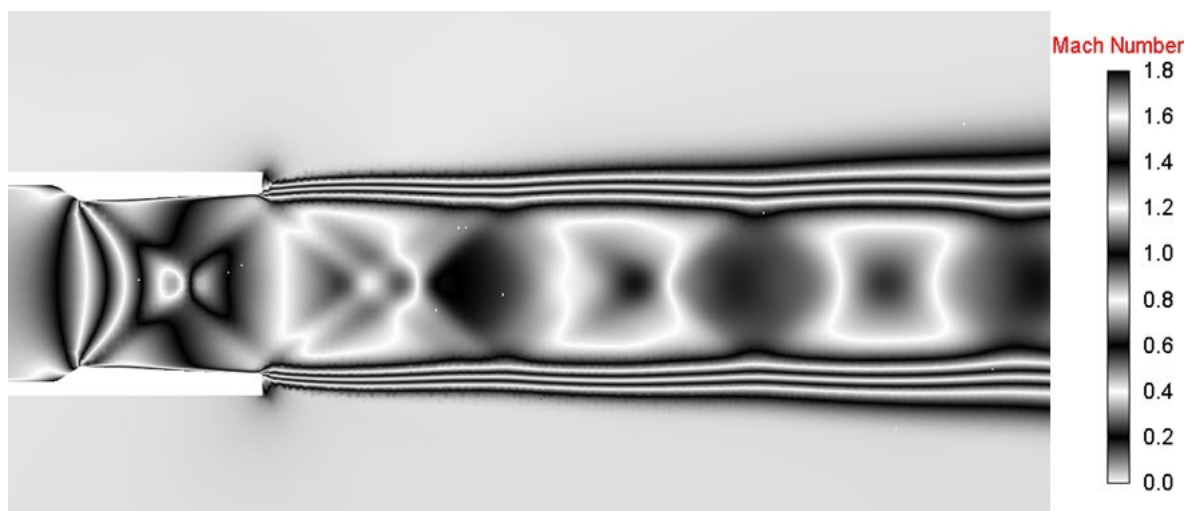


Рисунок 2.5.13– Распределение числа Маха, ч/б палитра (сетка Б)

Для получения более четкой картины течения применим метод статической адаптации расчетной сетки под особенности течения. Сетка второго уровня адаптации и поле распределения числа Маха на ней – показаны на рисунках 2.5.14-2.5.19.

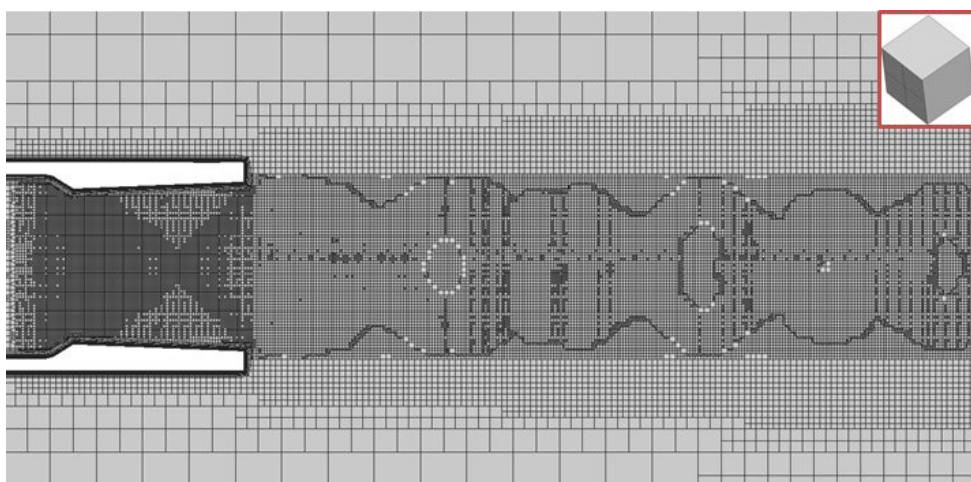


Рисунок 2.5.14– Сетка второго уровня адаптации (сетка А)

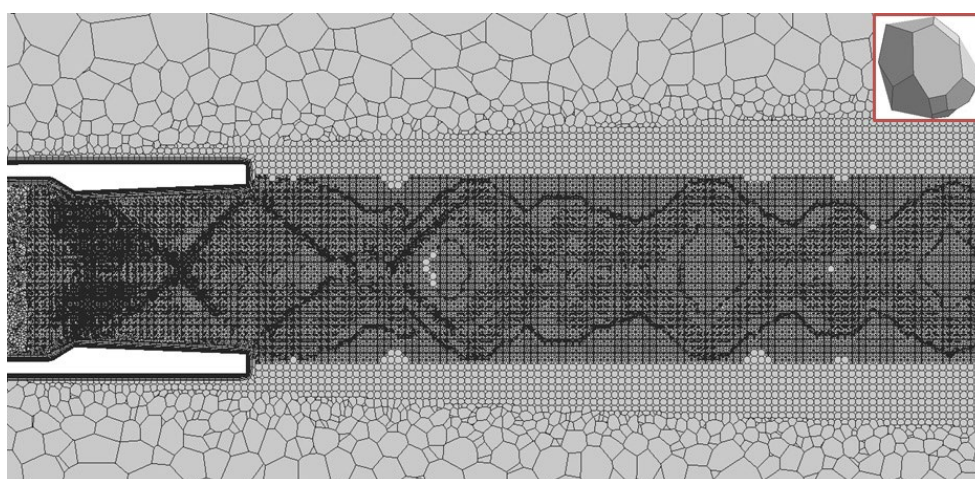


Рисунок 2.5.15 – Сетка второго уровня адаптации (сетка Б)

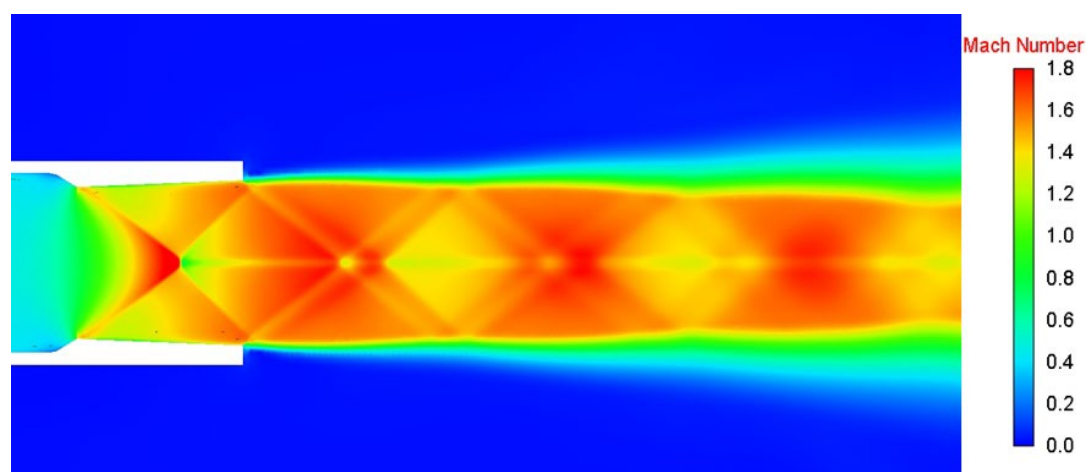


Рисунок 2.5.16 – Распределение числа Маха (сетка А)

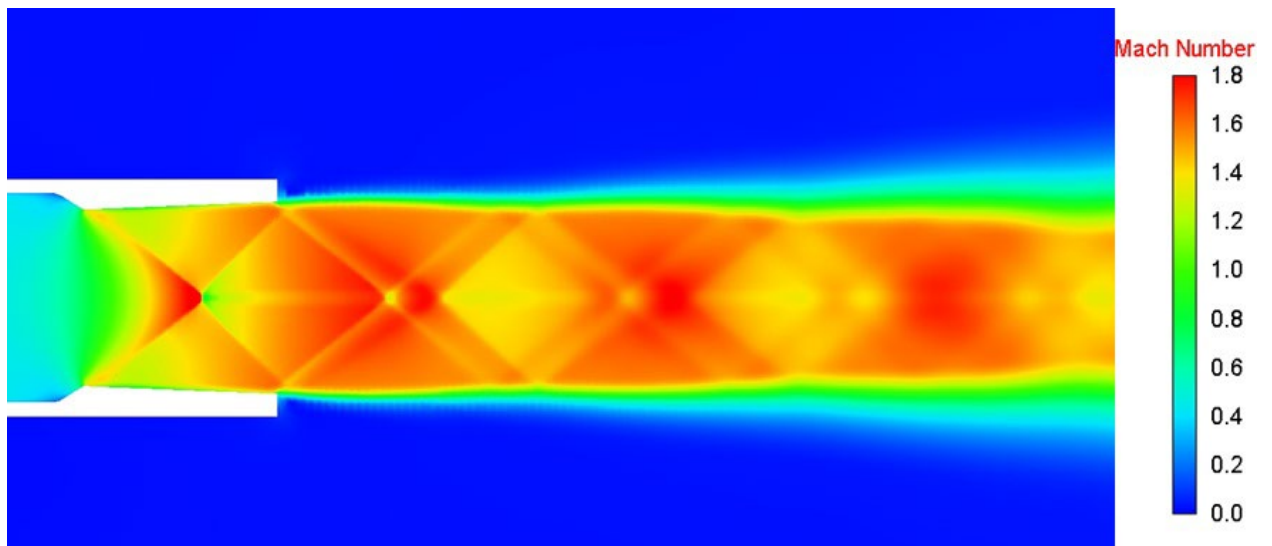


Рисунок 2.5.17 – Распределение числа Маха (сетка Б)

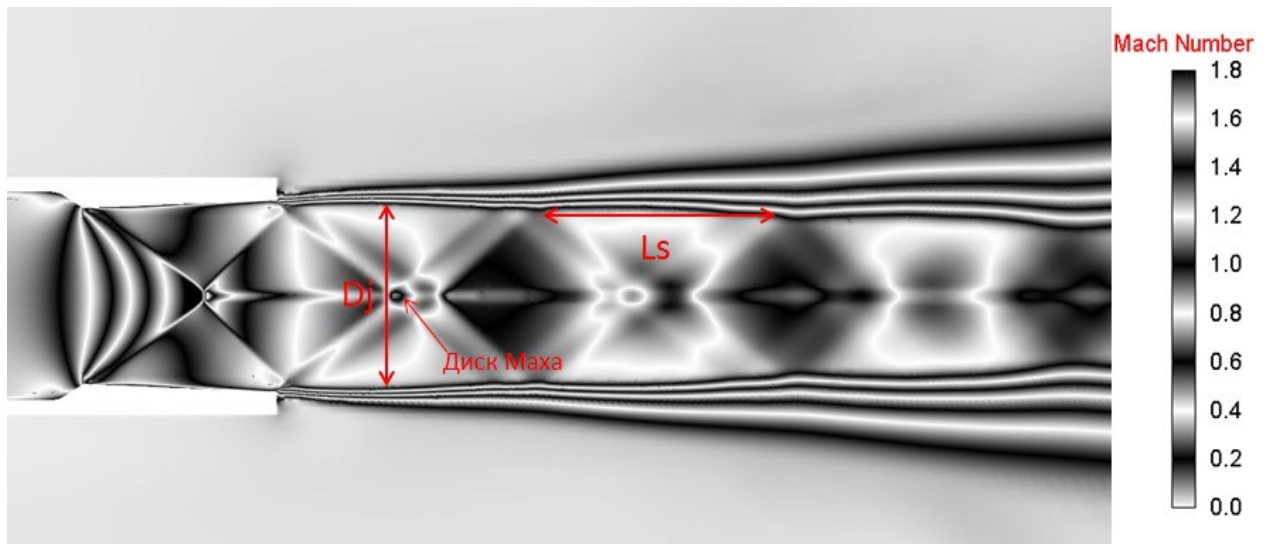


Рисунок 2.5.18 – Распределение числа Маха, ч/б палитра (сетка А)

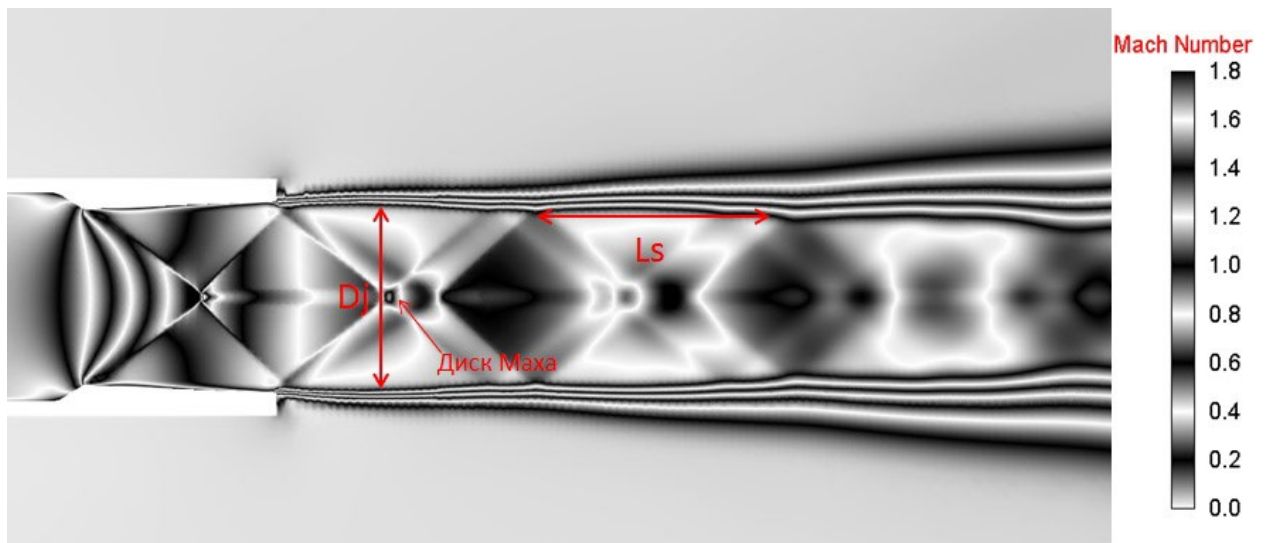


Рисунок 2.5.19 – Распределение числа Маха, ч/б палитра (сетка Б)

Построение локального измельчения способствовало повышению точности решения и позволило применить выражение (2.5.2) для нахождения связи длины второй бочки и диаметра полностью расширенной струи (рисунок 2.5.18-2.5.19). Расчет на более подробной стеке показывает наличие в течение такого элемента, как диск Маха.

На рисунке 2.5.20 представлен радиальный профиль продольной скорости, на котором видна центральная область повышенного модуля скорости.

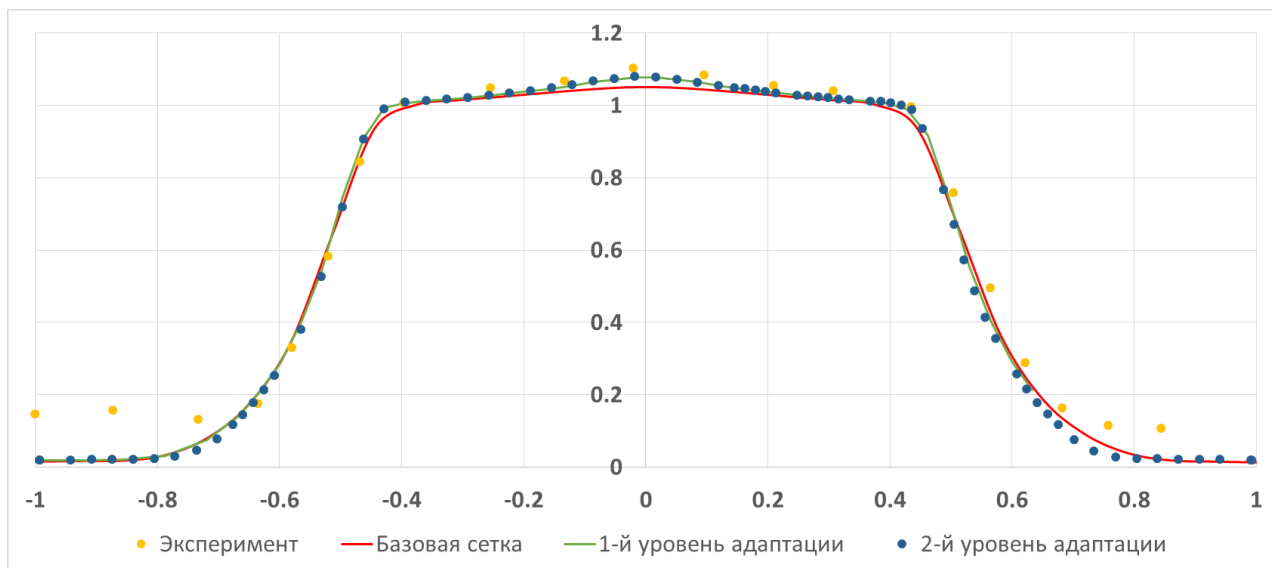


Рисунок 2.5.20– Радиальное распределение продольной скорости

Стоит отметить, что данный результат проявляется после применения алгоритма адаптации. На графике результаты на сетках А и Б – повторяют друг друга, поэтому они обозначаются одной подписью.

Разумеется, сопоставимый по точности результат можно получить и на сетке, построенной в сеточном генераторе, задав меньший размер ячейки в области локального измельчения. Однако таким образом будет построена излишне подробная модель, что приведет к снижению эффективности расчета. Для исследования величины эффективности от применения алгоритма адаптации расчетной сетки А оценим область, попадающую под критерий адаптации, и повторим ее в сеточном генераторе в виде геометрической фигуры.

В результате применения критерия адаптации по величине градиента давления с максимальным значением $5e-5$, для измельчения расчетной сетки была выделена область, показанная на рисунке 2.5.21.

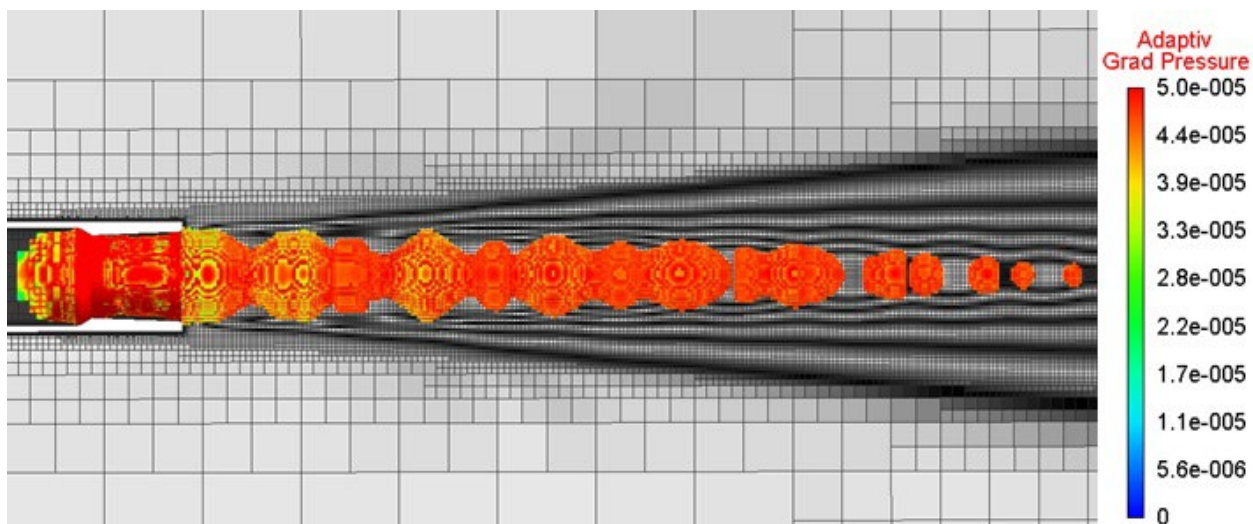


Рисунок 2.5.21 – Область, выделенная по критерию адаптации

Так как форма последовательности бочек в факеле струи имеет обычную осесимметричную форму, то данную область можно с большой точностью описать усеченным конусом, который будет использован для построения локального измельчения в сеточном генераторе (рисунок 2.5.22).

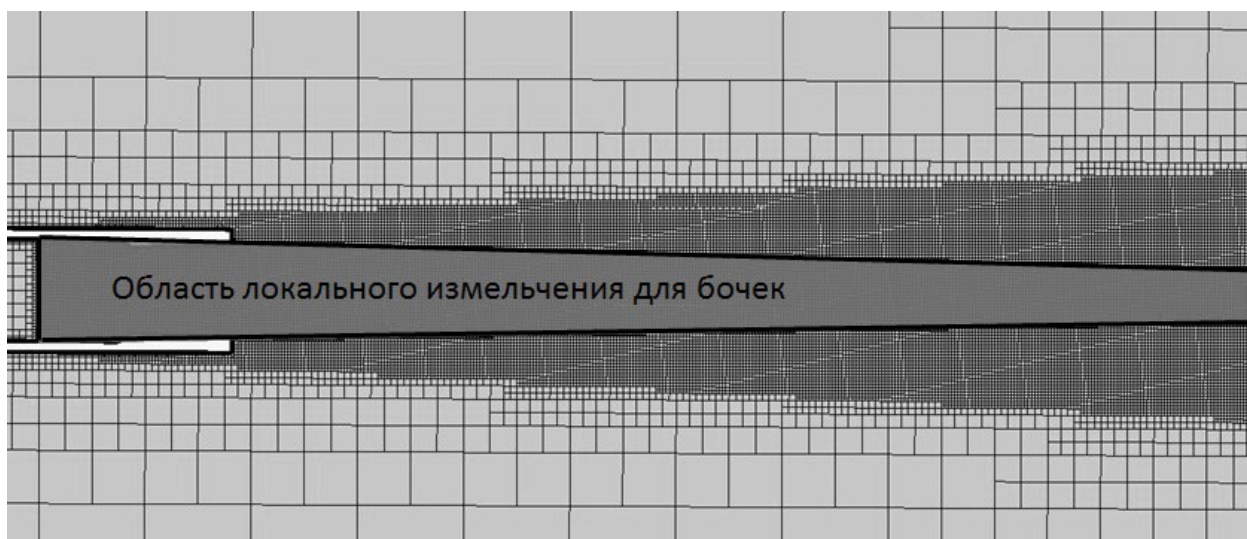


Рисунок 2.5.22 – Построение формы «усеченный конус» для области локального измельчения

В результате применения алгоритма адаптации и построения сетки с учетом области измельчения в форме конуса были получены следующие расчетные сетки (рисунок 2.5.23).

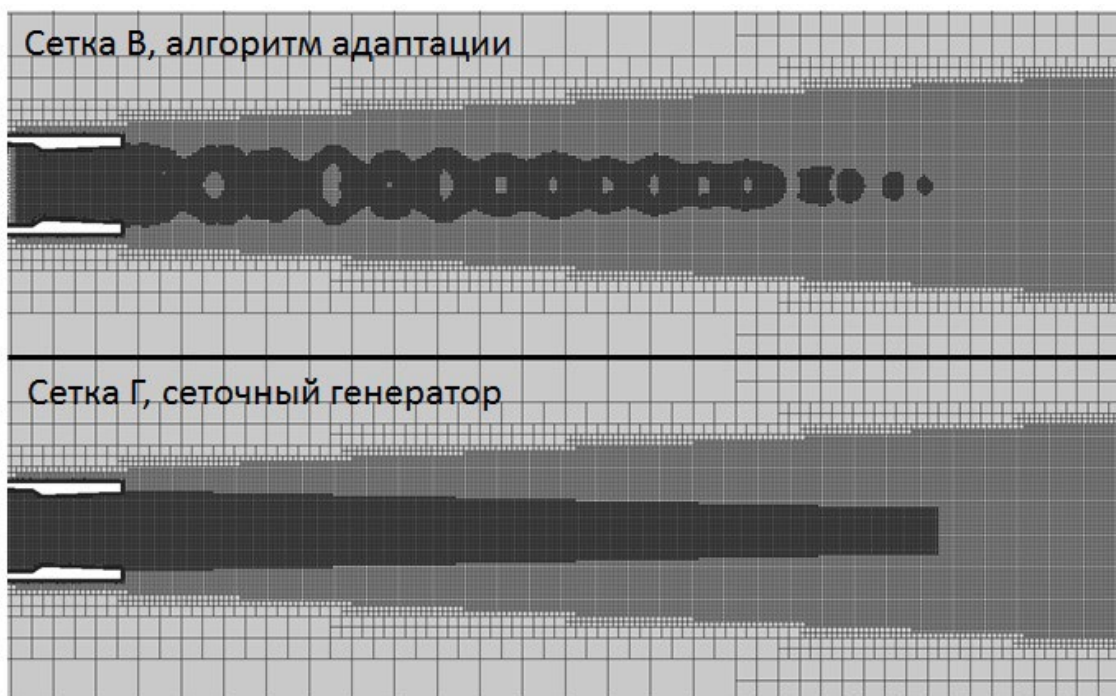


Рисунок 2.5.23– Сетки с областями локального измельчения

Размерность сетки В составляет 3626762 ячейки, сетки Г – 4333243 ячеек. В результате расчета на данных сетках были получены следующие поля модуля скорости (рисунок 2.5.24).

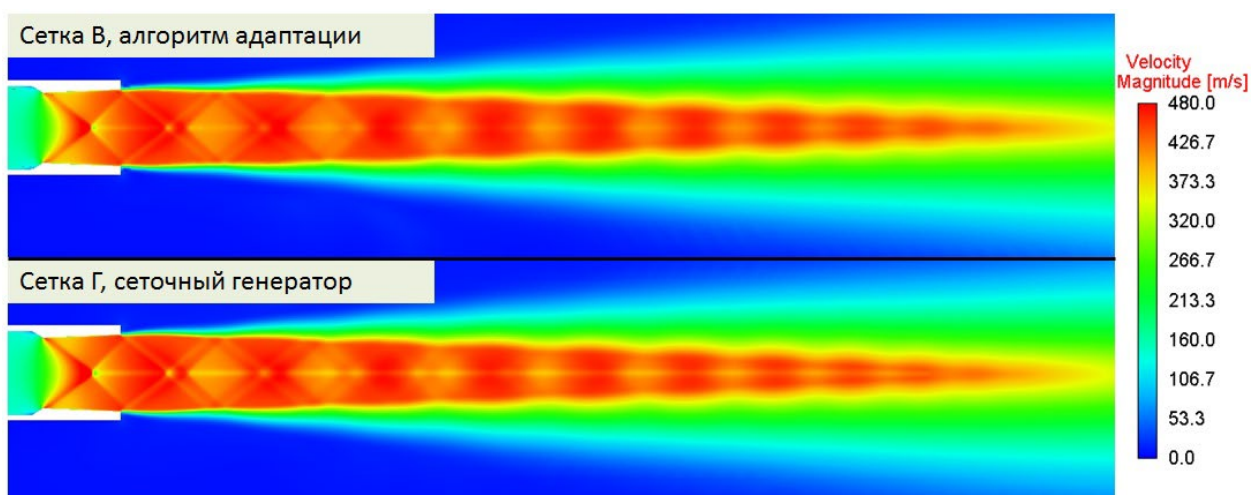


Рисунок 2.5.24 – Распределение модуля скорости (сетки В и Г)

На рисунке 2.5.25 представлен радиальный профиль продольной скорости в сечении 2,15D для расчета на сетке В и сетке Г.

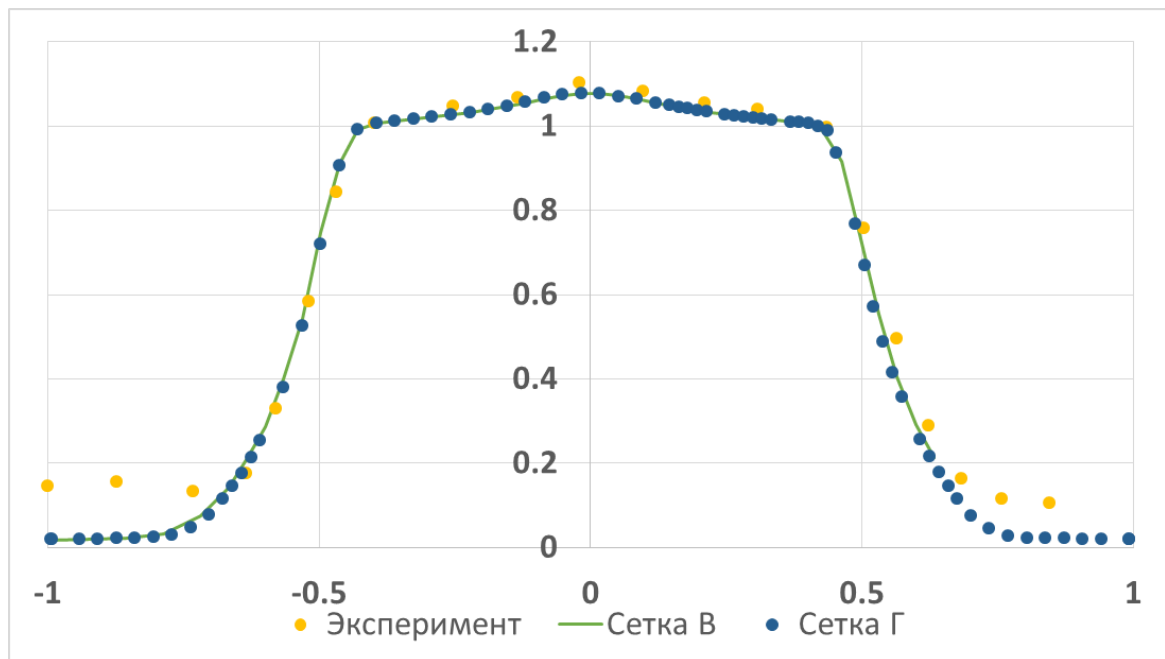


Рисунок 2.5.25 – Радиальное распределение продольной скорости в сечении 2,15D

Согласно представленному графику полученные результаты на сетках В и Г совпадают друг с другом. В обоих расчетах решение было получено за 400 итераций. Однако, в случае сетки В – время одной итерации составляет 0,59 секунды, а в случае сетки Г – 0,71 секунды. Таким образом, при одинаковых параметрах решателя и равном числе итераций применение сетки В повышает эффективность расчета на 16,9% за счет ускорения численного решения. Общие характеристики расчетов на сетках В и Г представлены в таблице 2.5.2.

Таблица 2.5.2. Характеристики расчетов на сетках В и Г

Сетка	Число ячеек	Время счета одной итерации, сек
Сетка В	3626762 (меньше на 16,3%)	0,59 (быстрее на 16,9%)
Сетка Г	4333243	0,71

Таким образом, применение метода статической адаптации повышает эффективность расчета задач газовой динамики за счет использования эффективной сеточной модели.

Актуальность задач данного класса очень высока, так как позволяет показать особенности струйных течений (например, связь между геометрией сопла и интенсивностью ударных волн в струе) при работе реактивных двигателей в реальных условиях без проведения эксперимента, а предлагаемый в работе алгоритм статической адаптации может быть применен для повышения эффективности таких исследований.

2.6 Заключение

В главе рассмотрены сеточные методы повышения эффективности математической модели для расчета высокоскоростных течений. Подход заключается в применении метода многосеточной инициализации для ускорения сходимости численного решения, а так же в применении метода статической адаптации расчетной сетки под особенности течения для повышения точности решения.

Представлено описание разработанного метода инициализации на основе многосеточного метода. Рассмотрены два способа построения последовательности грубых сеток (на основе взвешенного графа и на основе «равномерной квадратной» сетки). Приведен полный алгоритм решения задачи на установление на каждом из сеточных уровней. В результате применения предлагаемого метода было получено ускорение сходимости до 20%.

Для построения областей локального измельчения и повышения сеточного разрешения в главе приводится метод статической адаптации расчетной сетки под особенности течения. Представлено описание разработанного алгоритма адаптивно-встраивающихся сеток и предложен критерий для выбора области адаптации расчетной сетки.

Применение разработанных методов показано на задачах сверхзвукового обтекания. Получено, что предлагаемый в диссертационной работе подход может обеспечить ускорение численного решения сверхзвуковых задач (в рассматриваемых примерах более 20%). Понятно, что в зависимости от постановки задачи и тактики ее счета данное ускорение может быть как больше так меньше.

Глава 3. Исследование ударно-волновой структуры течения при сверхзвуковом обтекании тела

3.1 Введение

Как уже отмечалось, сверхзвуковое обтекание характеризуется наличием в потоке ударных волн, поэтому ударно-волновые конфигурации потока лежат в основе внешней и внутренней аэродинамики. В этом случае особенности распределения локальных аэродинамических характеристик определяются сложными структурами течения с взаимодействующими скачками уплотнения и замкнутыми отрывными зонами.

Изучение свойств и поведения ударных волн является важной задачей при проектировании летательных аппаратов [Максимов, 2006; Максимов&Шевелев, 2012, Башкин и др., 2005]. Так воздействия ударной волны на пристеночный слой течения – процесс, который необходимо учитывать при расчете аэродинамических характеристик (например, коэффициент сопротивления, тепловые потоки на поверхности) исследуемого объекта [Anderson, 1988, Хейз&Пробстин, 1962]. Более того, процесс проникновения ударной волны в пограничный слой и ее взаимодействие с твердой стенкой составляет одну из фундаментальных проблем газовой динамики.

Экспериментальные исследования таких процессов в высокоскоростных аэродинамических трубах весьма ограничены [Бражко, 2010; Землянский и др., 2004; Белошенко и др., 2002; Боровой, 1998]. Математическое моделирование может восполнить этот пробел, так как численный эксперимент дает детальную информацию о протекающих процессах [Башкин и др., 1997, 2001; Бекетаева и др., 2016; Грудницкий & Мендель; Ваганов, 2010]. Однако при этом следует принимать во внимание качество разрешения ударно-волновых структур, что подразумевает сохранение на ее фронте точности, монотонности и устойчивости решения, особенно это касается расчетов на произвольных неструктурированных сетках. Как уже было показано в предыдущих главах одним из способов для этого является применение модифицированного ограничителя потока. В случае же использования неструктурированных расчетных сеток, что актуально для сложных геометрических объектов, повышению точности расчета так же способствует и применение гибридного метода вычисления градиентов. Данные приемы способствуют правильному моделированию развития неустойчивых возмущений и отслеживанию их взаимодействия с неоднородностями течения, таких как зоны отрыва потока. Если в качестве исследуемого объекта рассматривается модель реального самолета, то для сокращения времени расчета и повышению его эффективности можно применить метод многосеточной инициализации и алгоритм статической адаптации, как уже это было показано на задачах предыдущей главы.

В данной главе численно исследуется сверхзвуковое (с числом Маха 2) течение в канале с клином, характеризующееся взаимодействием отраженной ударной волны с пристеночным слоем течения [Булат, 2015, Егоров&Новиков, 2004, 2005]. Эта конфигурация типична для элементов конструкции летательных аппаратов: изломов обтекателей поверхности воздухозаборников, генерирующих косые скачки уплотнения; отклоняемых рулевых поверхностей (балансирующих щитков), а так же области между мотогондолами. Здесь пристеночное течение при взаимодействии с ударной волной характеризуется локальным отрывом пограничного слоя [Башкин и др., 1997, 2001]. На данной задаче анализируется влияние ударно-волновой структуры на аэродинамические характеристики поверхности канала. В частности, рассматривается возможность применения методов и алгоритмов, представленных в диссертационной работе, для исследования сверхзвукового течения при изменении обтекаемой геометрии. В качестве заключительной задачи моделируется сверхзвуковое обтекание летательного аппарата, при исследовании АДХ которого применяются разработки, описанные в диссертационной работе.

3.2 Исследование формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом обтекании клина

Расчетные и экспериментальные исследования сверхзвукового течения вязкого газа в каналах переменного сечения (см., например, [Башкин и др., 1997, 2001; Булат 2015]) показали, что в тракте канала реализуется сложная структура течения с взаимодействующими скачками уплотнения и замкнутыми отрывными зонами. Это, в свою очередь, определяет особенности распределения местных аэродинамических характеристик по стенкам канала.

В данном параграфе рассмотрено сверхзвуковое течение вязкого газа в канале переменного сечения при числе Маха на входе $M=2$ [Стручков&Козелков, 2023]. Данная форма канала была выбрана по следующим причинам. Во-первых, она моделирует задачу о взаимодействии падающей ударной волны с пограничным слоем на плоской пластине, а так же задачу отражения косоугольного скачка уплотнения. Во-вторых, она имитирует модель простейшего бокового сверхзвукового воздухозаборника. На примере решения такой задачи можно выяснить особенности развития сверхзвукового течения газа и поведение аэродинамических характеристик в зависимости от определяющих параметров.

В физической плоскости расчетная область представляет собой канал, ограниченный сверху и снизу твердыми поверхностями (рисунок 3.2.1). Геометрические параметры канала следующие: высота входа в канал $a_0 = 1$, высота горла $a = 0.824$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 7$, начальный клин имеет угол раствора 10° .

На входной границе («FreeStream») задан поток вязкого совершенного газа с числом Маха 2, температурой 300°K , давлением 101325 Па . На выходной границе («Pressure») задано давление 101325 Па . Нижняя и верхняя поверхности являются твердыми стенками («Wall No Slip»). Задача считается в симметричной постановке.

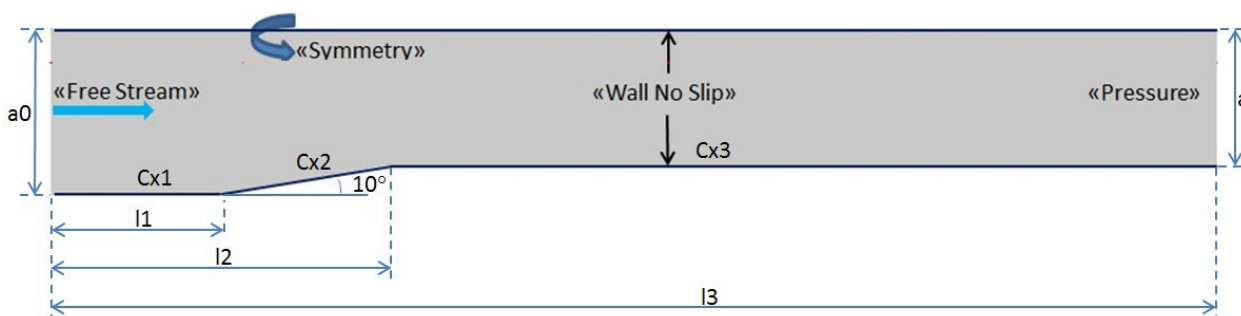


Рисунок 3.2.1 – Схема расчетной области

В результате расчета необходимо определить значение коэффициента сопротивления C_x для нижних составляющих стенки канала: C_{x1} , C_{x2} , C_{x3} .

Для расчета используется неструктурированная сетка (рисунок 3.2.2) из усеченных шестигранников с призматическими слоями вблизи стенки. Число ячеек составляет 294170.

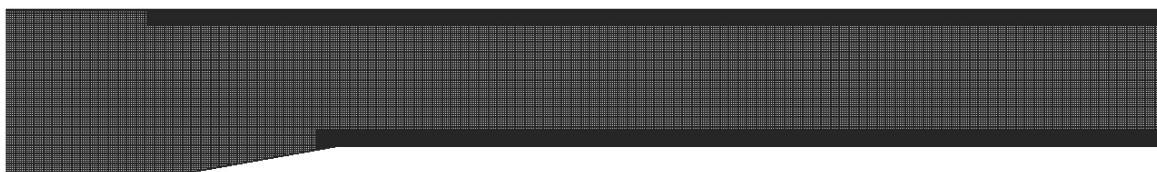


Рисунок 3.2.2 – Расчетная сетка

Общее представление о структуре поля течения в плоском канале дают картины изолиний и распределения различных параметров потока. В качестве примера на рисунке 3.2.3 приведены картины изолиний числа Маха, а так же распределение температуры и давления.

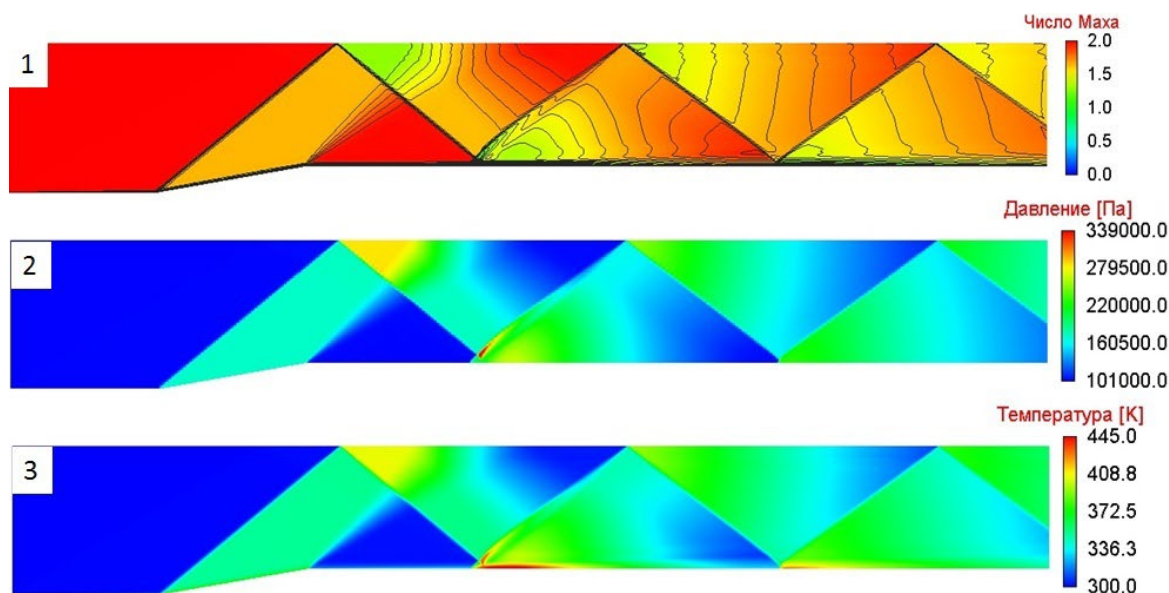


Рисунок 3.2.3 – Изолинии и поле числа Маха (1), давление (2), температура (3)

Возмущения от стенки обтекаемого клина распространяются в виде скачков уплотнения вниз по потоку и ограничивают на входе область невозмущенного потока – отраженный от нижней поверхности поток начинает взаимодействовать с потоком у верхней поверхности при $X \sim 1$, вызывая на ней замкнутую отрывную область [Башкин и др., 1997, 2001].

В возмущенном поле течения пограничные слои характеризуются толщиной, позволяющей четко формироваться системе взаимодействующих скачков уплотнения. На верхней поверхности при обтекании отрывной зоны образуется скачок уплотнения, который попадает на нижнюю поверхность и приводит на ней к отрыву потока. При этом

на верхней поверхности канала отрывные области чуть меньше, в то время как на нижней поверхности наблюдается обширная замкнутая область отрывного течения, вызванная взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем (рисунок 3.2.4).

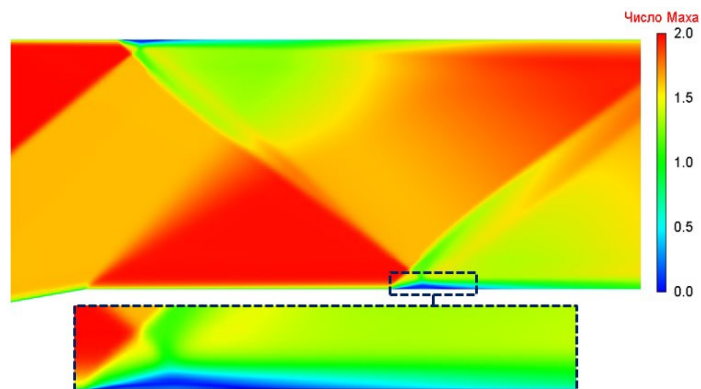


Рисунок 3.2.4 – Отрывная зона на нижней поверхности

На рисунке 3.2.5 представлено поле плотности в области взаимодействия ударной волны с пограничным слоем.

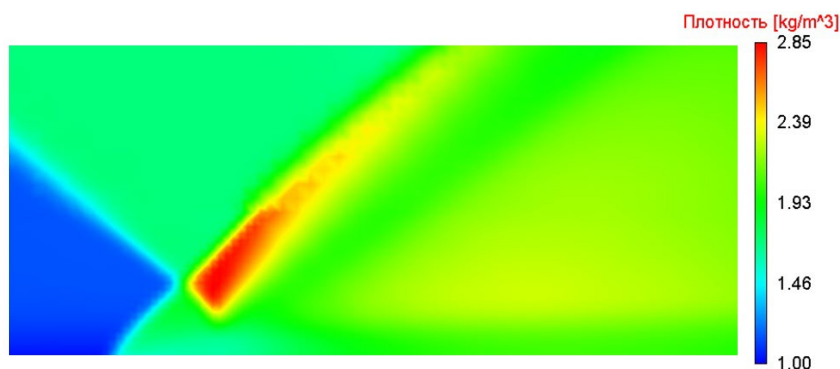


Рисунок 3.2.5 – Поле плотности (локально в области падения ударной волны)

Согласно [Башкин и др., 1997, 2001], течение в канале характеризуется двумя типами взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем. Если интенсивность падающей ударной волны невелика, то в области взаимодействия общий перепад давления меньше критического значения и течение газа является безотрывным. В случае интенсивной ударной волны ее взаимодействие с пограничным слоем приводит к образованию замкнутой отрывной зоны, в которой имеет место дозвуковое циркуляционное течение.

Распределение местных аэродинамических характеристик на нижней стенке выявляет некоторые закономерности развития течения в канале и особенности теплообмена на его стенках. В рассматриваемом случае, ламинарно-турбулентный переход на нижней стенке возникает до точки отрыва потока. Падающий скачок

уплотнения взаимодействует с турбулентным пограничным слоем (рисунок 3.2.6) и приводит к формированию отрывной зоны с дозвуковым течением.

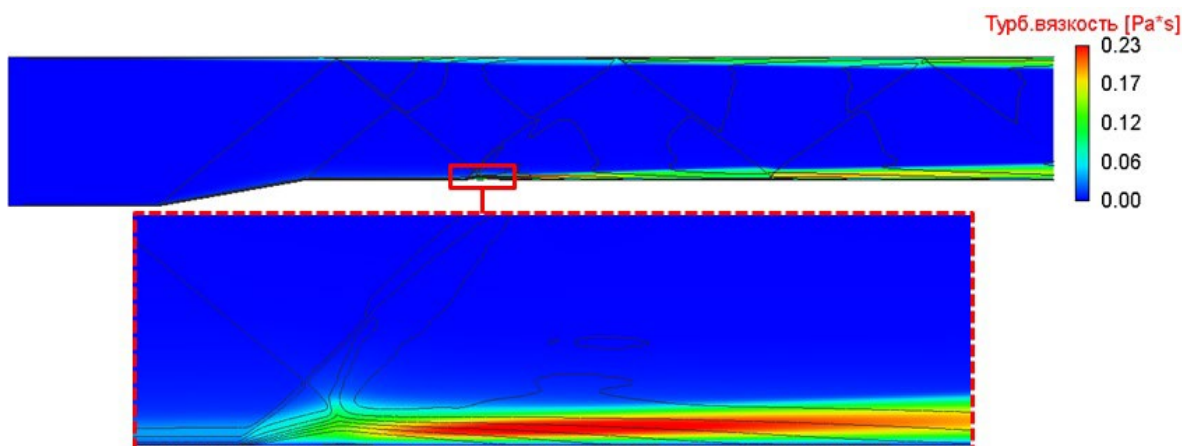


Рисунок 3.2.6 – Турбулентная вязкость в области падения ударной волны

В отрывной зоне на нижней стенке параметры турбулентности принимают достаточно высокие значения, что указывает на турбулизацию течения в слое смешения отрывной зоны. Вследствие этого в окрестности точки присоединения потока течение имеет турбулентный характер. Далее вниз по потоку течение в пограничном слое также является турбулентным.

Зону отрыва пограничного слоя можно определить как область, где становится отрицательным коэффициент поверхностного трения. Координата $X_s=2.01$ — определяет точку отрыва пограничного слоя (separation), а $X_a=2.21$ — точку присоединения (attachment). Это соответствует местам, где нулевая линия тока отходит от поверхности и вновь соединяется с ней. Отрывная зона при данной конфигурации канала и параметрах потока имеет длину 0.2 (рисунок 3.2.7). Отметим, что в области падения второй ударной волны ($x=4.2$) так же наблюдается отрывная зона, однако ее протяженность очень мала.

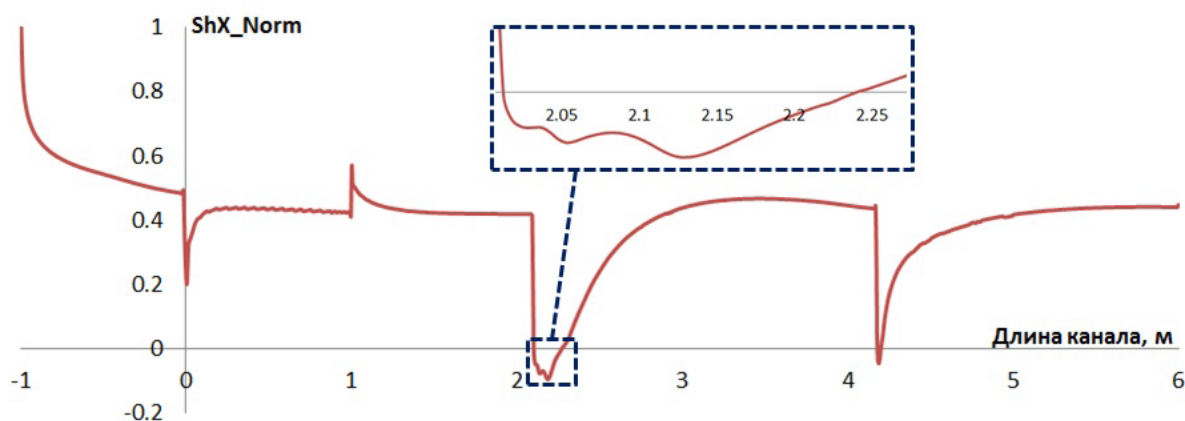


Рисунок 3.2.7– График распределения нормированного коэффициента трения по нижней стенке

Распределение коэффициента трения показывает, что на участке канала [0;1] наблюдаются осцилляции численного решения, что, скорее всего, связано с физической неустойчивостью течения на данном участке.

Ниже представлен график распределения давления по координате x вдоль длины канала от его начала (рисунок 3.2.8) вблизи верхней стенки на высоте 0.95.

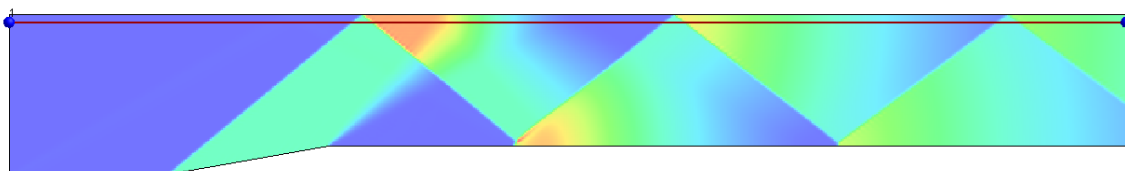


Рисунок 3.2.8 – Линия для оценки распределения давления на высоте 0.95

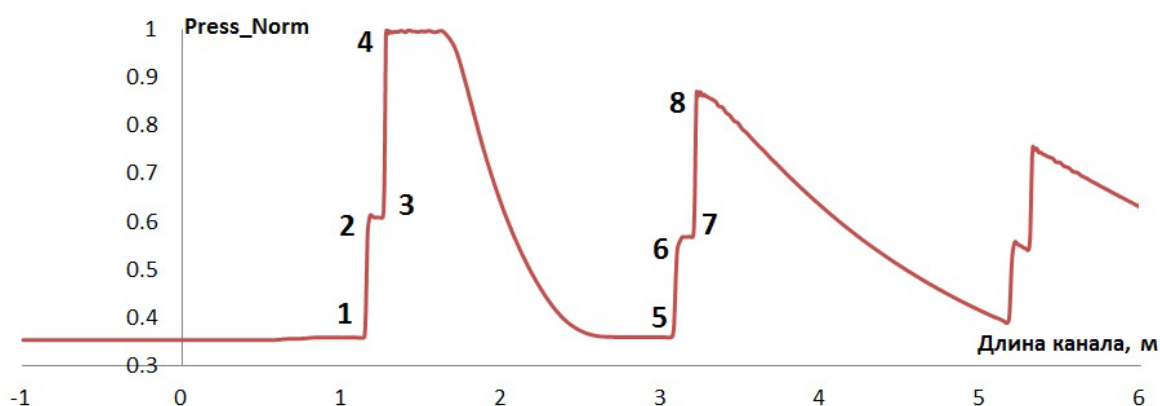


Рисунок 3.2.9 – Распределение давления вдоль линии $y=0.95$

На графике (рисунок 3.2.9) изображена картина, которая образовалась при обтекании клина сверхзвуковым потоком газа, в результате многократного отражения ударной волны от стенки канала. Участки 1-2 – это присоединенная к клину ударная волна, участок 3-4 – ударная волна, отраженная от стенки канала, 5-6 – ударная волна, прошедшая через область, занимаемую волной разрежения, 7-8 – ударная волна после отражения от верхней границы канала [Грудницкий&Мендель].

Аналогично для оценки характера распределения ударно-волновой структуры вблизи нижней стенки канала оценивалось давление вдоль линии на высоте 0.226 (рисунок 3.2.10) вблизи нижней стенки.

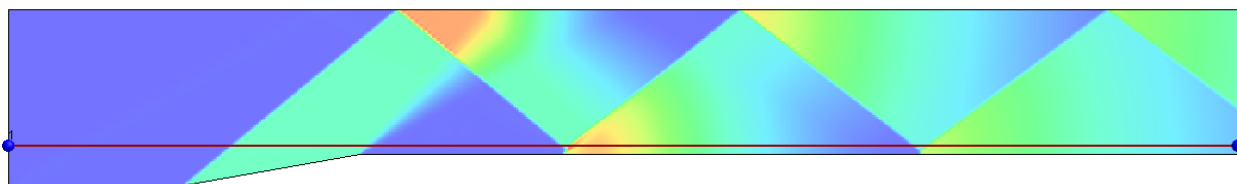


Рисунок 3.2.10 – Линия для оценки распределения давления на высоте 0.226

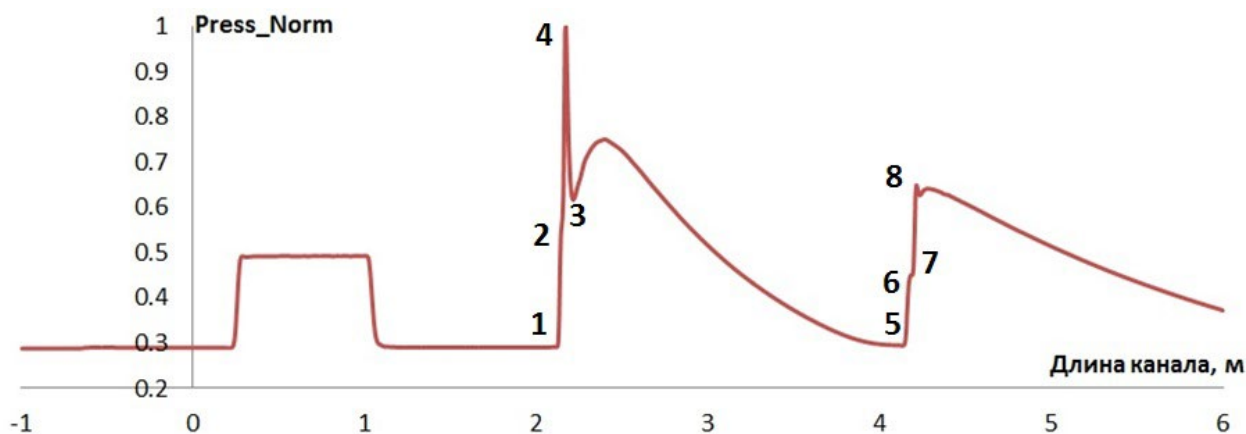


Рисунок 3.2.11 – Распределение давления вдоль линии $y=0.226$

На графике 3.2.11 изображена картина, характеризующая взаимодействие ударной волны с пограничным слоем. Участки 1-2 – ударная волна, пришедшая от верхней границы с характерным локальным максимумом в результате взаимодействия с пограничным слоем и образованием области отрыва потока, 3-4 – ударная волна, прошедшая через область, занимаемую волной разрежения, 7-8 – ударная волна после отражения от нижней границы канала.

На нижней поверхности абсолютный максимум давления образуется в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем. В результате резкого роста давления при переходе через скачок уплотнения происходит отрыв пограничного слоя от поверхности, причем точка отрыва находится выше по течению от точки пересечения падающего скачка с пограничным слоем. Это объясняется тем, что возмущение давления за скачком распространяется вверх по потоку через дозвуковую часть пограничного слоя. Далее вниз по потоку неблагоприятный градиент давления уменьшается, оторвавшийся пограничный слой вновь присоединяется к обтекаемой поверхности и начинает утолщаться, в результате чего генерируется третий скачок уплотнения, («скачок уплотнения, вызванным присоединением»). Между этими двумя скачками уплотнения формируется веер волн разрежения («течение Прандтля Майера»). Отметим также, что в точке присоединения толщина пограничного слоя существенно меньше, а давление больше, чем до начала взаимодействия со скачком, что приводит к значительному росту теплового потока на стенке в окрестности этой точки.

Область между скачками уплотнения вызванными отрывом и присоединением называется областью взаимодействия. Вниз по течению от этой области происходит объединение обоих скачков и формируется обычный отраженный скачок уплотнения, который имел бы место в случае невязкого течения. Зона вниз по течению от области

взаимодействия называется областью восстановления. Отметим, что масштаб области взаимодействия и его интенсивность существенно зависят от того является ли течение турбулентным или ламинарным. Поскольку ламинарный пограничный слой более подвержен отрыву, чем турбулентный, то при ламинарном режиме течения отрыв возникает при меньших интенсивностях падающего скачка, а при одинаковых интенсивностях он оказывается более протяженным, чем в случае турбулентного режима течения.

Для оценки аэродинамических свойств нижней стенки канала приведем значения коэффициента сил лобового сопротивления согласно схеме (рисунок 3.2.12).

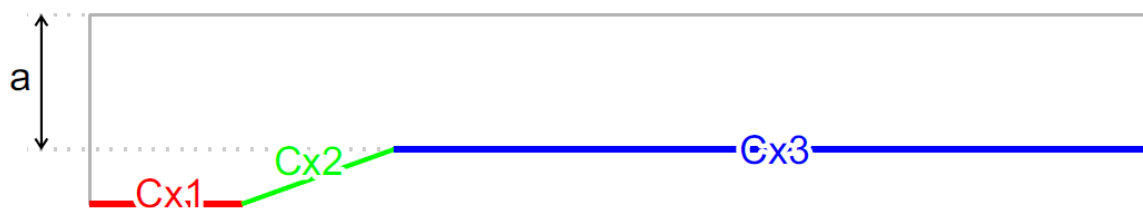


Рисунок 3.2.12 – Схема оценки коэффициента силы лобового сопротивления

Итоговые значения коэффициентов представлены в таблице 1.

Таблица 3.2.1. Значение коэффициента силы лобового сопротивления

Геометрия	C_{x1}	C_{x2}	C_{x3}
Исходный вид	0.00175112	0.046674	0.0012023

В значение коэффициента силы лобового сопротивления всей нижней поверхности наибольший вклад вносит ударно-волновая структура. Именно на нижней стенке канала происходит взаимодействие ударной волны с пограничным слоем течения, что определяет локальные аэродинамические свойства объекта.

Одним из **возможных** и наиболее простых способов для изменения распределения локальных АДХ является изменение формы обтекаемой поверхности за счет добавления локальных конструктивных элементов, изменяющих структуру пристеночного течения.

В качестве предлагаемых элементов рассматриваются остроугольная равнобедренная пирамида и полусфера. Однако схема их размещения является отдельной задачей для исследования и рассматривается в следующем параграфе.

3.3 Влияние дополнительных механических элементов на распределение аэродинамических характеристик в сверхзвуковом течении

В данном параграфе исследуется задача взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем течения. Рассматривается влияние дополнительных механических элементов на локальные аэродинамические свойства поверхности за счет изменения свойств пристеночного течения [Стручков&Козелков, 2023]. В качестве возможных механических элементов, которые будем называть турбулизаторами, предлагается остроугольная равнобедренная пирамида и полусфера (рисунок 3.3.1).

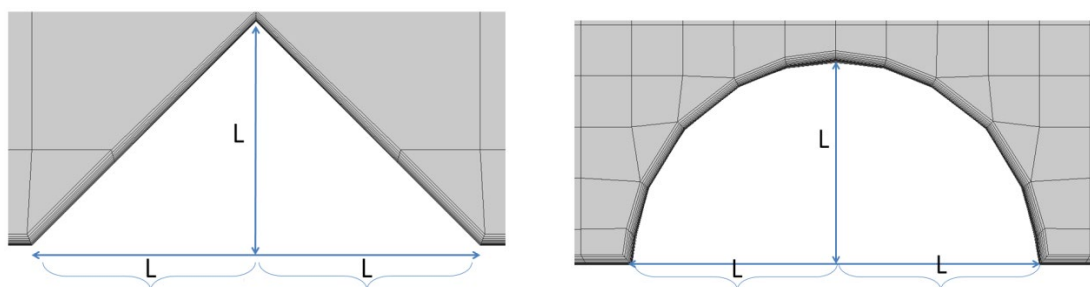


Рисунок 3.3.1 – Форма дополнительных конструктивных элементов

Высота пирамиды и радиус полусферы равны L (рисунок). Рассматриваются только неровности, выступающие над базовой линией канала.

Допускается размещение турбулизаторов на нижней стенке, однако конкретное их положение (рисунок 3.3.2) является предметом исследования данного параграфа.

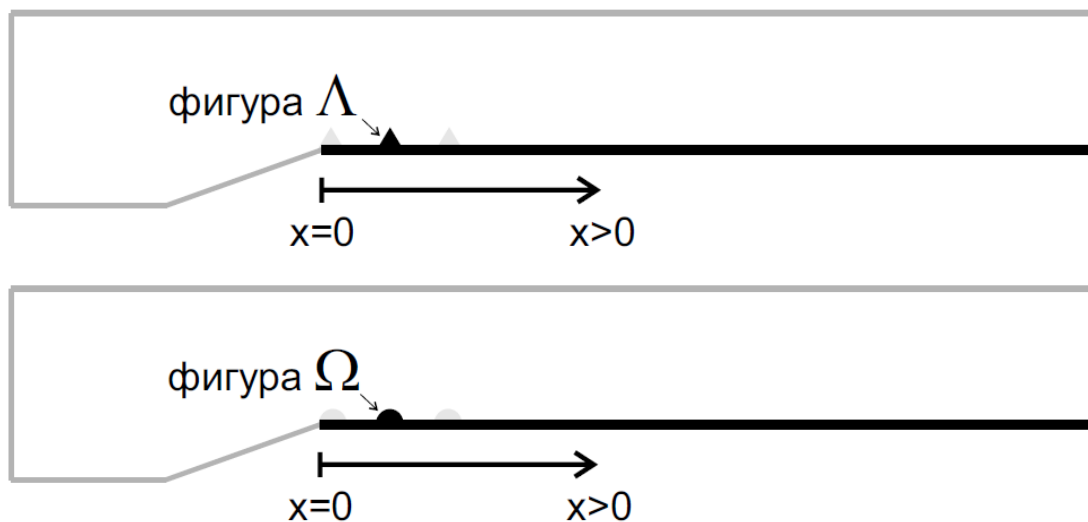


Рисунок 3.3.2– Схема размещения элементов на стенке канала

Первым вариантом размещения турбулизаторов на стенке является положение перед падающей ударной волной. Однако на каком именно расстоянии до места взаимодействия ударной волны с пограничным слоем неизвестно. На рисунке 3.3.3 схематично показано

положение пирамиды и полусферы на фоне поле числа Маха для исходной геометрии канала.

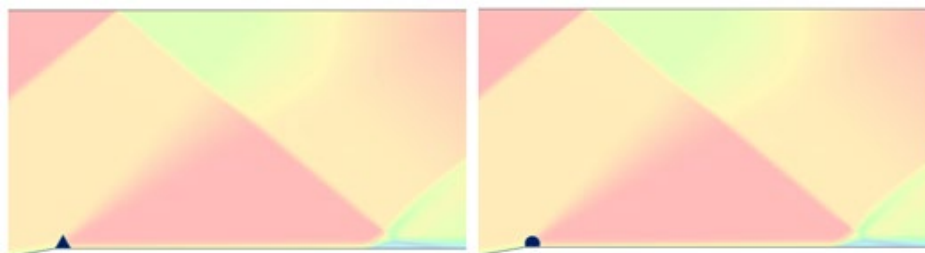


Рисунок 3.3.3 – Положение элементов на нижней стенке (треугольная пирамида – слева, полусфера – справа)

Такое размещение соответствует точке отхода ударной волны от нижней поверхности. В результате обтекания модифицированной геометрии канала формируется следующая структура течения (рисунок 3.3.4, приводится в сравнении с исходной геометрией).

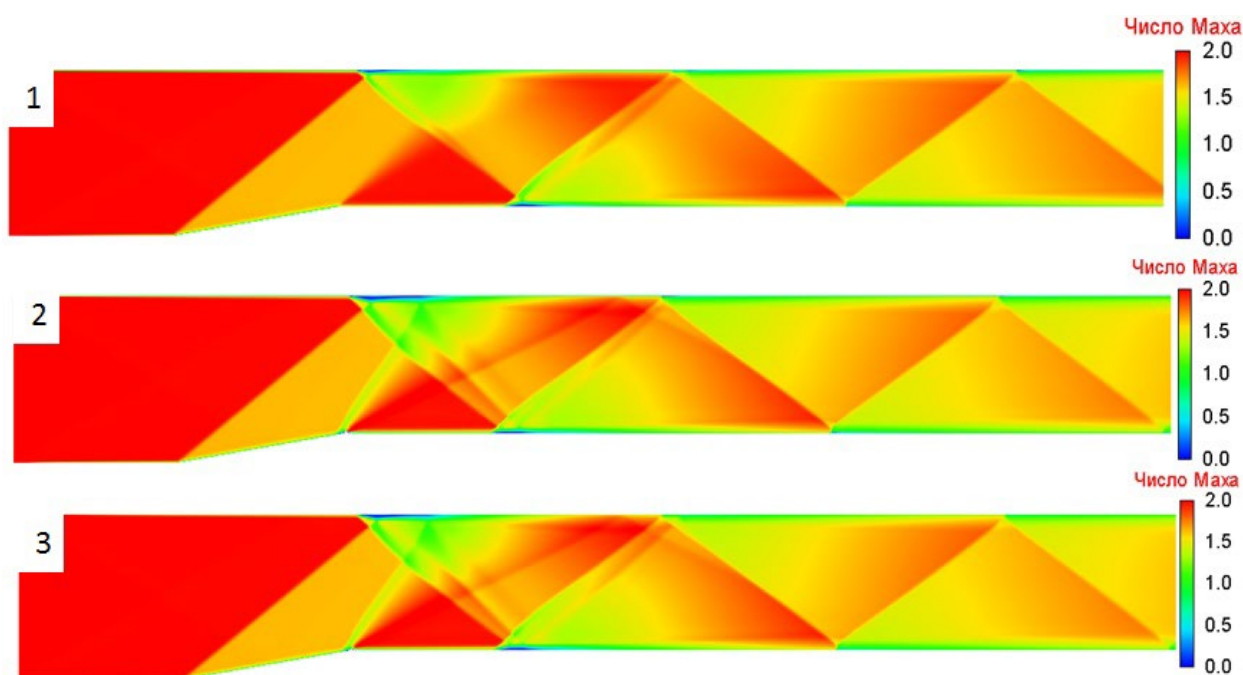


Рисунок 3.3.4– Поле числа Маха (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

Согласно полученным результатам, внесенный элемент формирует дополнительную ударную волну. Причем турбулизатор попадает в область распространения ударной волны, идущей от клиновидной поверхности.

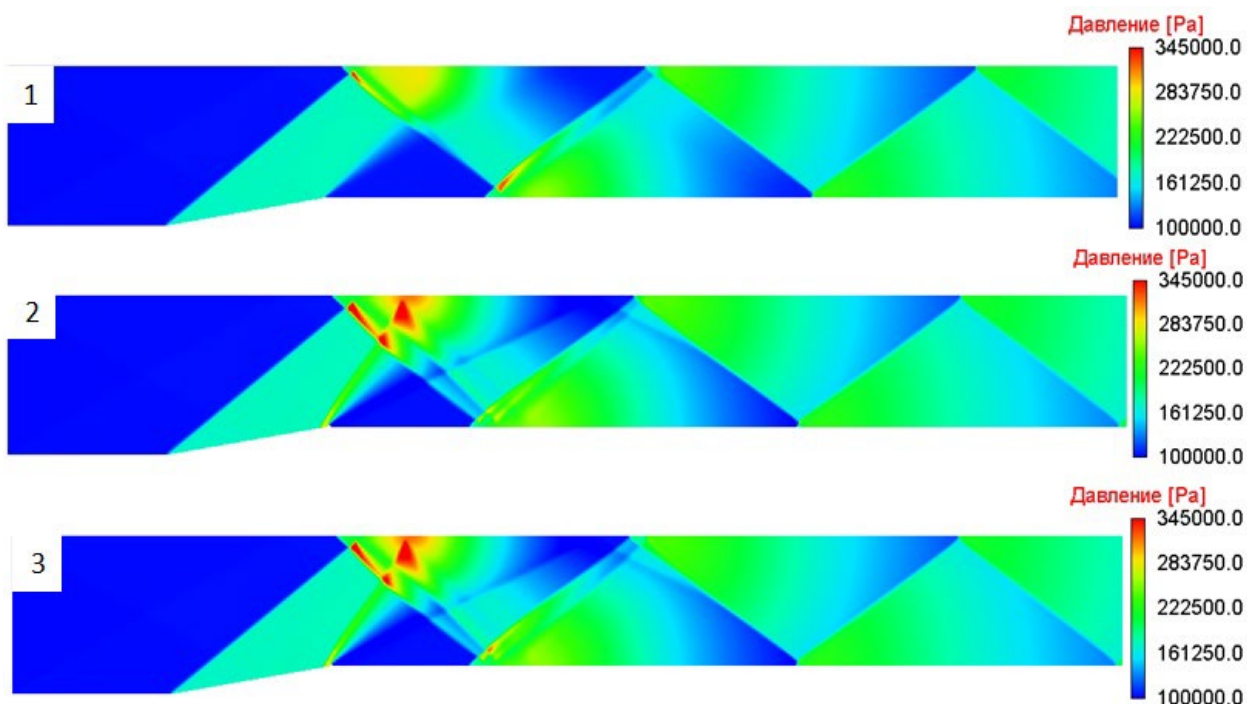


Рисунок 3.3.5 – Поле давления (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

В результате взаимодействия системы ударных волн (от клиновидной поверхности и от полусферы) вблизи верхней поверхности (рисунок 3.3.5) наблюдаются области повышенного давления, возникшие на пересечении фронтов. Такое распределение газодинамических параметров является более сложным и не способствует улучшению локальных аэродинамических свойств нижней поверхности канала (таблица 3.3.1). Отметим, что в данной задаче исследуется влияние на поток и распределение локальных аэродинамических свойств поверхности, расположенной далее по потоку от точки установки турбулизатора.

Таблица 3.3.1. Значение C_x (схема обозначения C_{x1} , C_{x2} , C_{x3} показана на рисунке 3.2.12)

Геометрия	C_{x1}	C_{x2}	C_{x3}
Стандартный вид	0.00175112	0.046674	0.0012023
С учетом турбулизатора (полусфера)	0.00175112	0.0494023	0.0011013
С учетом турбулизатора (пирамида)	0.00175112	0.0489995	0.0010678

Наблюдается снижение коэффициента силы лобового сопротивления C_{x3} на 10%. Однако данный результат был получен в результате того, что часть ударной волны пришла на поверхность турбулизатора и тем самым ослабила ударную волну, идущую от клиновидной поверхности к верхней стенке канала. Такой подход изменяет первоначальную волновую структуру за счет перенаправления «образующей» ударной волны. Напомним, что основной целью является изменение свойств течения за счет

влияния на пристеночный слой течения. Поэтому необходимо переместить турбулизатор далее по потоку и убрать его из области распространения ударной волны (рисунок 3.3.6).

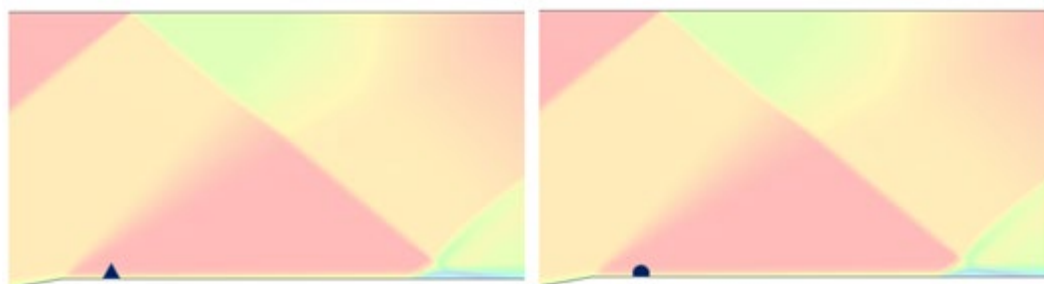


Рисунок 3.3.6 – Расположение турбулизаторов на нижней поверхности

В результате обтекания данной конфигурации элементов реализуется следующая картина течения. На рисунках 3.3.7 далее показаны поля числа Маха и давления в сравнении с течением в канале исходного вида.

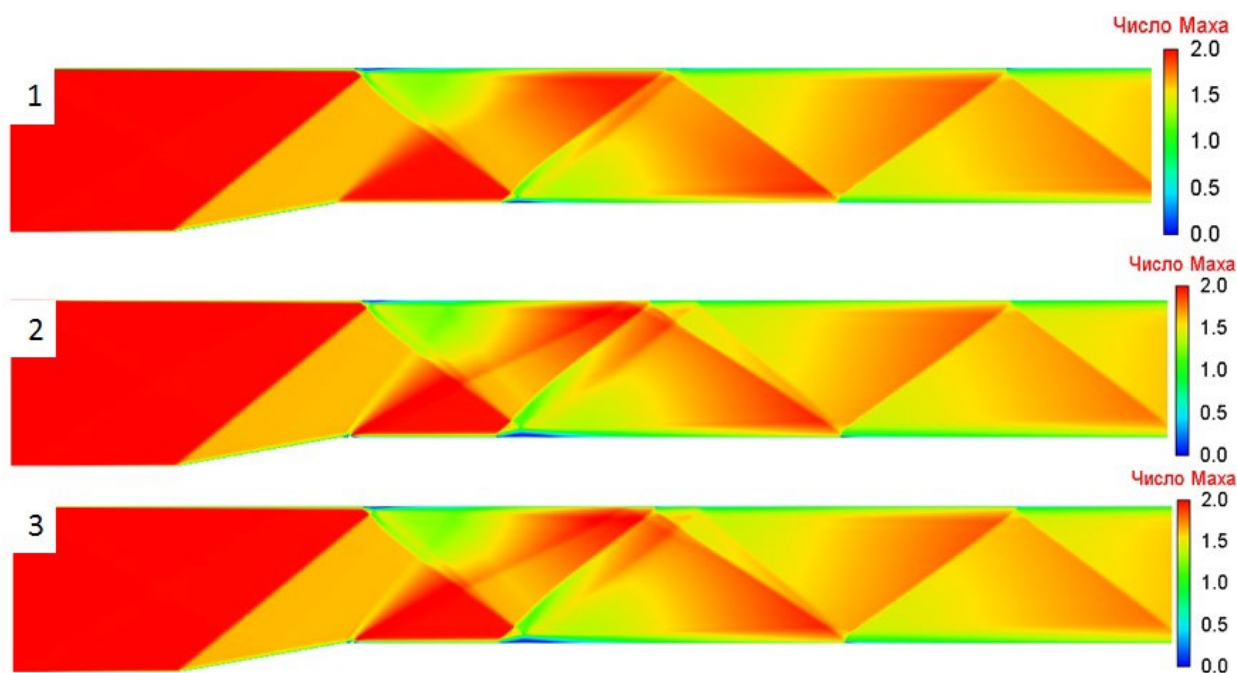


Рисунок 3.3.7 – Поле числа Маха (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

Согласно полученным характеристикам (рисунок 3.3.8), при данной конфигурации дополнительный элемент формирует слабое возмущение, вызывающее менее заметный (по сравнению с первым вариантом) рост давления вблизи верхней поверхности (рисунок). Новое возмущение не изменяет общую структуру ударно-волновой картины. Наибольшее изменение наблюдается в области падения скачка уплотнения на нижнюю стенку, где формируется обширная отрывная зона. В целом, оба типа турбулизаторов формируют одинаковую новую структуру потока.

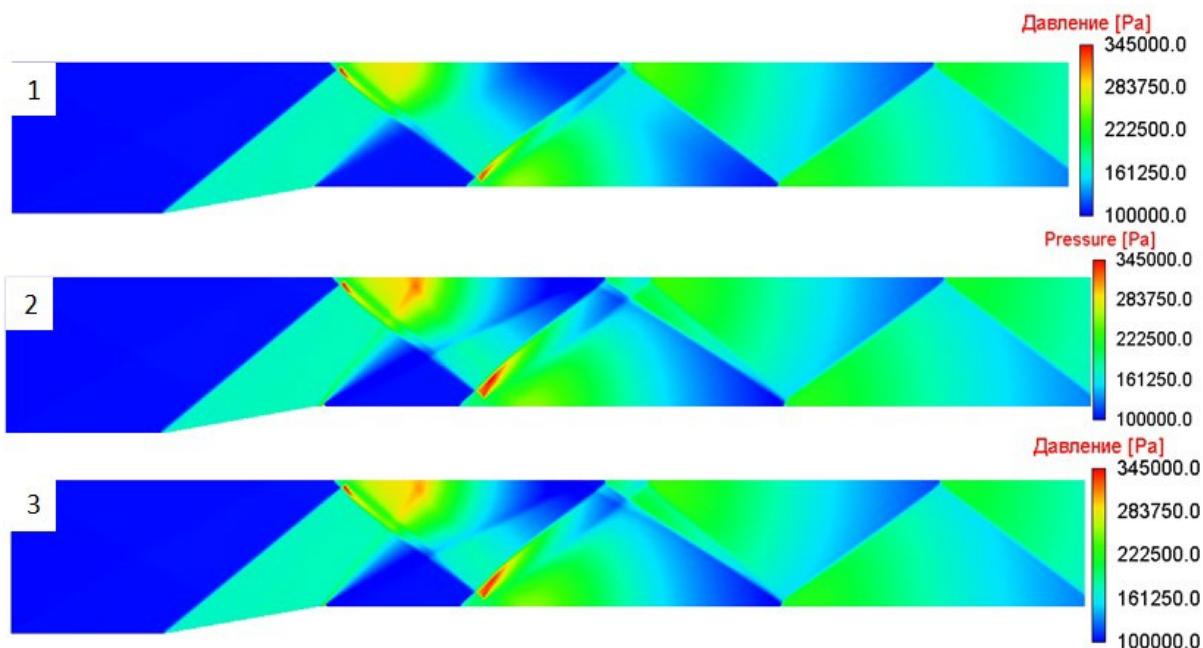


Рисунок 3.3.8 – Поле давления (1 – исходная геометрия, 2 – полусфера, 3 – пирамида)

Расширение отрывной зоны привело к снижению значения коэффициента силы лобового сопротивления C_{x3} на 15% в области вниз по потоку за турбулизатором (таблица).

Таблица 3.3.2. Значение C_x (схема обозначения C_{x1} , C_{x2} , C_{x3} показана на рисунке 3.2.12)

Геометрия	C_{x1}	C_{x2}	C_{x3}
Стандартный вид	0.00175112	0.046674	0.0012023
С учетом турбулизатора (полусфера)	0.00175111	0.0466851	0.00104364
С учетом турбулизатора (пирамида)	0.00175112	0.046678	0.00103392

Рассмотрим протяженность области отрыва потока для исходного канала и второй конфигурации канала. Для этого построим график распределения коэффициента трения по нижней поверхности (рисунок 3.3.9).

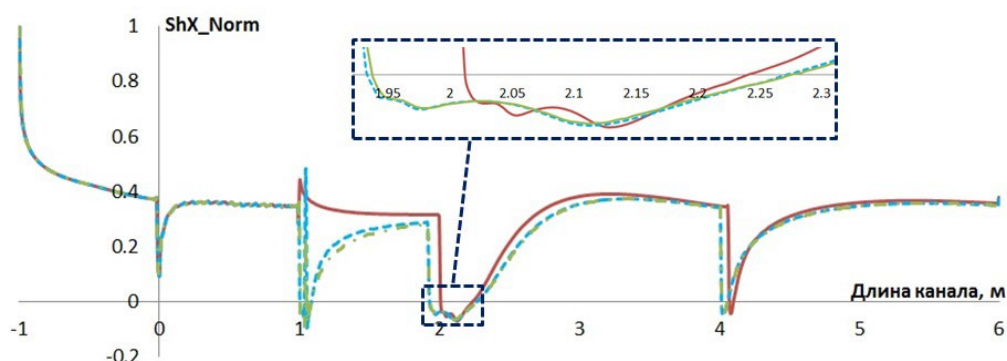


Рисунок 3.3.9 – График распределения нормированного коэффициента трения по нижней стенке (красная линия – исходная геометрия, синяя – с турбулизатором полусфера, зеленая – с турбулизатором пирамида)

Будем считать, что с учетом обоих турбулизаторов формируется равная отрывная зона. Координата $X_s=1.92$ — определяет точку отрыва пограничного слоя, а $X_a=2.27$ — точку присоединения (attachment). Отрывная зона при данной конфигурации канала и параметрах потока имеет длину 0.35.

Таблица 3.3.3. Параметры отрывной зоны в области падения скачка уплотнения

Геометрия	Начало (X_s)	Конец (X_a)	Длина
Стандартный вид	2.01	2.21	0.2
С учетом турбулизатора	1.92	2.27	0.35

Расширение отрывной зоны повлияло на распределение давления вдоль линии канала на высоте $y=0.226$ (рисунок 3.3.10).

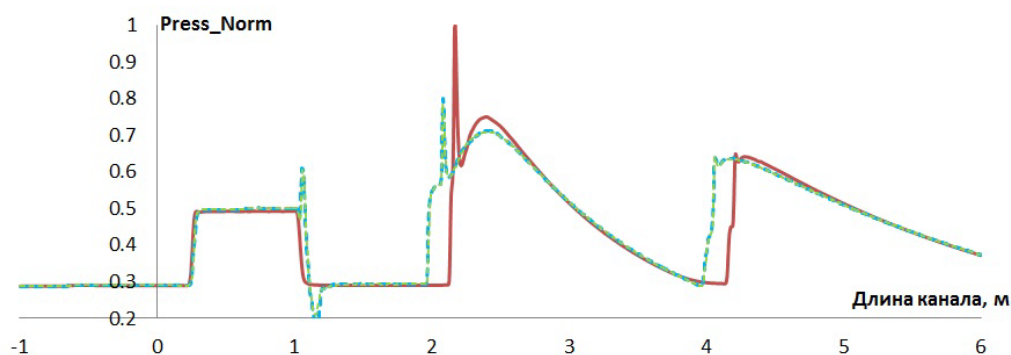


Рисунок 3.3.10 – Распределение давления вдоль линии $y=0.226$

Согласно представленному графику, максимальное значение давления в области взаимодействия ($1.9 < x < 2.2$) скачка уплотнения с пристеночным слоем уменьшилось на 20% (с 352 кПа до 282 кПа).

Таким образом, применение турбулизатора в форме полусферы и пирамиды позволило уменьшить значение коэффициента силы лобового сопротивления на поверхности далее по потоку на 15%. Проведенный эксперимент показывает не много большее влияние треугольного турбулизатора. Однако значительное влияние на распределение локальных характеристик поверхности оказывает конфигурация размещения турбулизаторов. В целом, добавление турбулизаторов вносит слабое возмущение в течение, но имеет заметное влияние на пристеночный слой течения, что способствует изменению характеристик его взаимодействия с падающим скачком уплотнения. Рассмотренный здесь прием изменения аэродинамических характеристик объекта применяется в следующем параграфе при исследовании обтекания модели летательного аппарата.

3.4 Моделирование АДХ сверхзвукового летательного аппарата

Численное моделирование помогает получить аэродинамические характеристики уже на ранних стадиях проектирования многорежимного летательного аппарата, пригодного для решения различных задач. Особенно это актуально в случае, если рассматриваемое изделие характеризуется сложной интегральной аэродинамической схемой.

Как уже отмечалось в тексте данной работы, особый интерес применения компьютерного моделирования характерен при исследовании и оптимизации высокоскоростных летательных аппаратов. Это связано с особенностями течения, возникающими как вблизи исследуемого объекта (отвечающее за свойства его внешней аэродинамики), так и во внутренних элементах его конструкции (что необходимо учитывать при проектировании геометрии воздухозаборных устройств двигателя).

С увеличением производительности компьютерных систем возникает практический интерес в моделировании конструкции в целом, что приводит к значительному усложнению геометрических форм расчетной области, и все большему увеличению доли применения неструктурированных сетках, состоящих из произвольных многогранников.

В рамках данной работы примером такого исследования является моделирование аэродинамических характеристик сверхзвукового маневренного летательного аппарата [Стручков&Козелков, 2023]. Основной целью решения этой промышленно-ориентированной задачи является демонстрация применимости представленной в диссертационной работе математической модели в случае рассмотрения течений с ударными волнами, а так же повышения эффективности исследования, что выражается в сокращении расчетного времени задачи, за счет применения методов на сеточном уровне.

Для моделирования обтекания используется геометрическая модель прототипа сверхзвукового летательного аппарата, находящаяся в общем доступе на интернет-ресурсе www.grabcad.com (рисунок 3.4.1-3.4.2) [электронный ресурс].

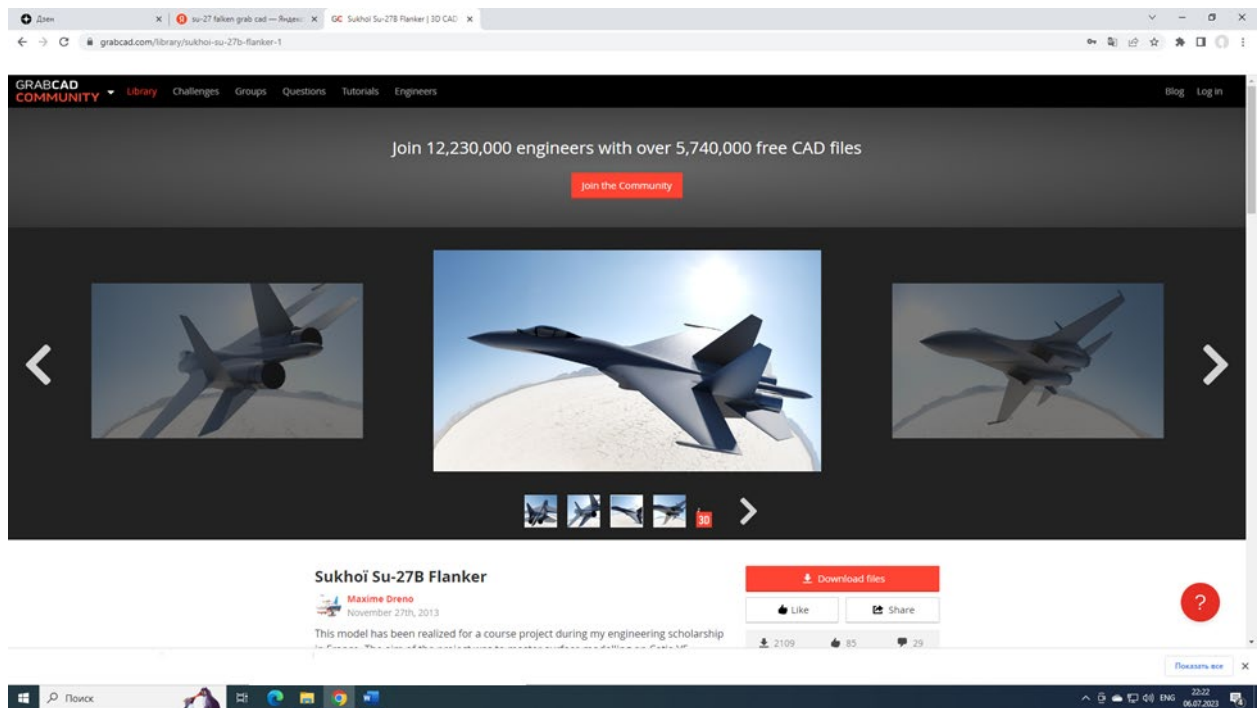


Рисунок 3.4.1 – Изображение геометрической модели «Sukhoi Su-27 B Flanker» (www.grabcad.com)

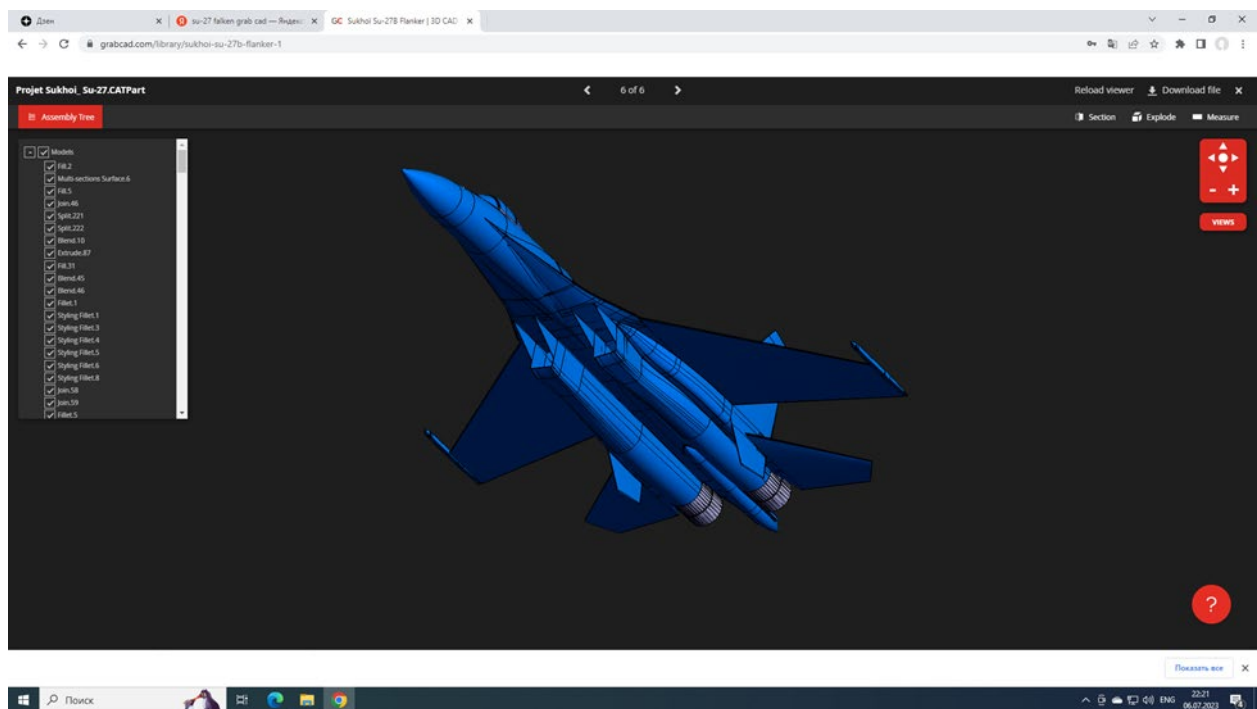


Рисунок 3.4.2– Изображение геометрической модели «Sukhoi Su-27 B Flanker» (www.grabcad.com)

После загрузки модель была обработана средствами пакета программ Логос – исправлены топологические ошибки, удалены некоторые поверхности и лишние элементы конструкции (рисунок 3.4.3).

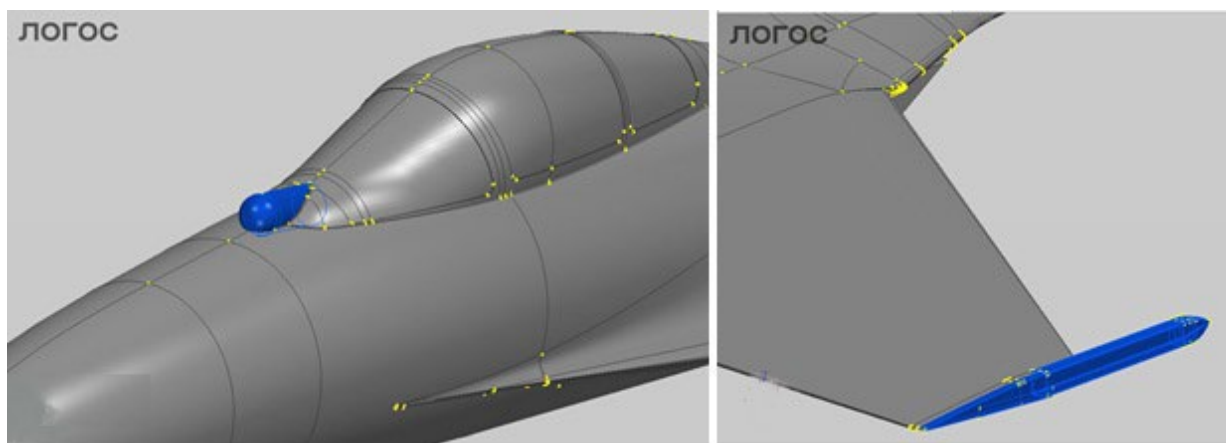


Рисунок 3.4.3 – Фонарь кабины ЛА (слева), элемент на крыле ЛА (справа) – удаление

Для удобства работа выполняется с половиной геометрии (рисунок 3.4.4), однако в расчете используется расчетная сетка полной модели, полученная зеркальным отображением одной половины.

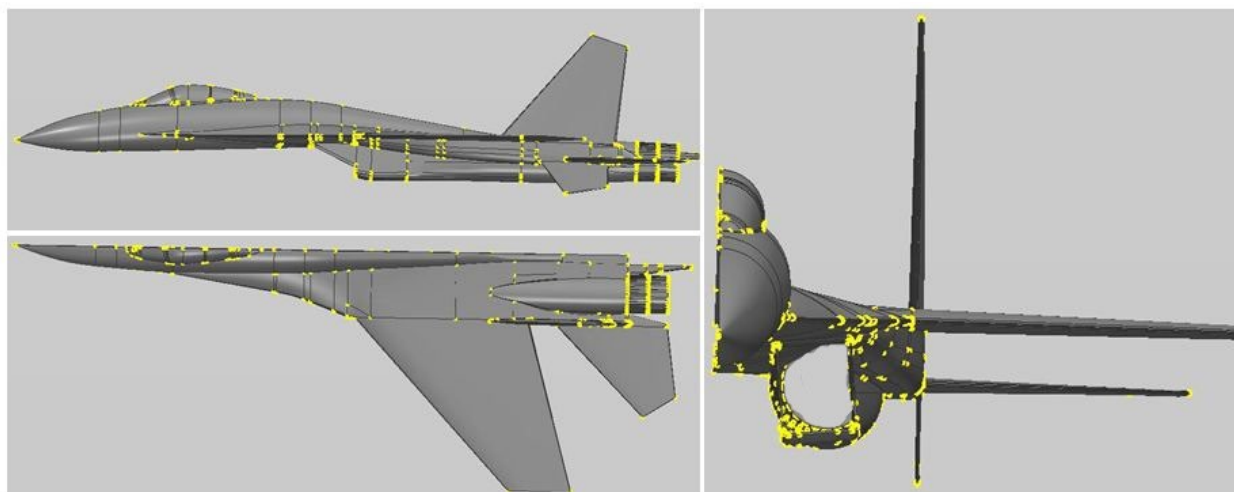


Рисунок 3.4.4 – Половина геометрической модели

Построение расчетной сетки и подготовка расчетной модели выполняется в пакете программ Логос [Никитин и др., 2021; Борисенко и др., 2018], где расчетная сетка строится методом отсечения. На рисунке 3.4.5 представлена поверхностная сетка модели, которая используется для генерации расчетной сетки. Минимальный размер ячейки поверхностной сетки летательного аппарата равен 0.01 м, максимальный – 0.1 м. При построении поверхностной сетки внешней области минимальный и максимальный размер ячейки задан 10 метров.

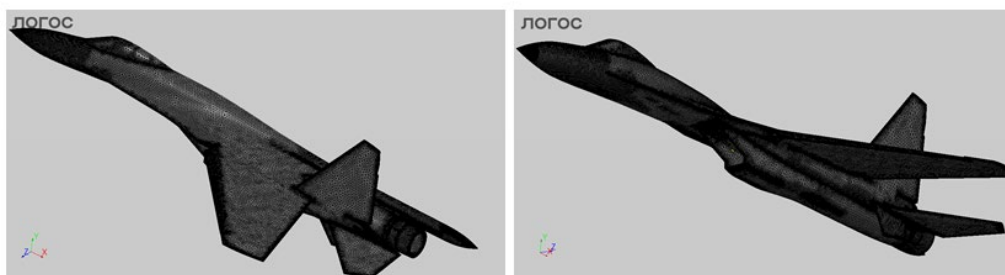


Рисунок 3.4.5 – Поверхностная сетка модели

Основные параметры расчетной сетки определяются следующими значениями: толщина пограничного слоя – 0.8 м, коэффициент сгущения – 1.3, количество слоев – 10. Для описания течения вокруг самолета установлена прямоугольная область локального измельчения (рисунок 3.4.6), размер и положение которой показаны на рисунке. Размер ячейки в данной области задан 0.1 м.

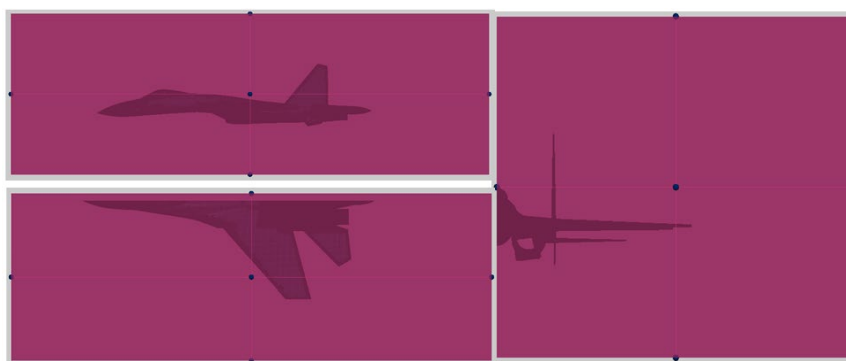


Рисунок 3.4.6 – Положение блока локального измельчения вокруг летательного аппарата

Для получения качественного решения в области между воздухозаборниками и внутри них применяется дополнительный блок локального измельчения, с размером ячейки 0.02 м, положение которого показано на рисунке 3.4.7.

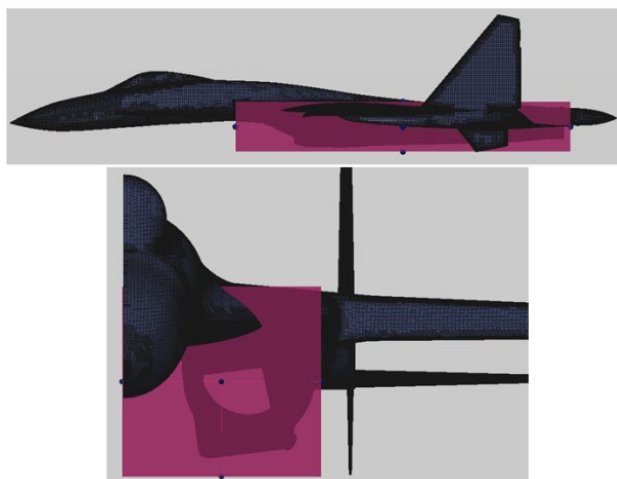


Рисунок 3.4.7 – Положение блока локального измельчения под летательным аппаратом

Построенная с указанными параметрами расчетная объемная сетка составляет 29 млн ячеек (рисунок 3.4.8), а в случае рассмотрения полной модели – 59 млн ячеек.

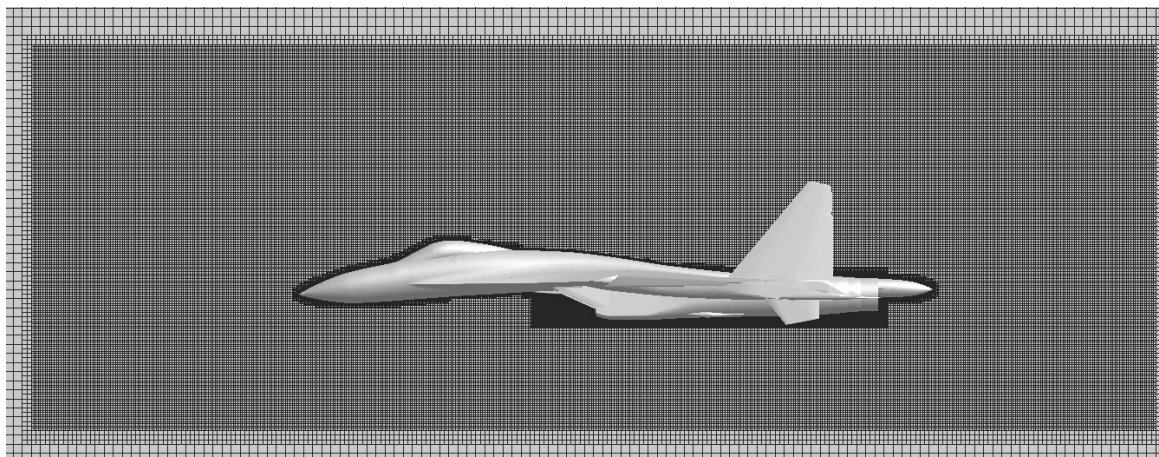


Рисунок 3.4.8 – Расчетная сетка, сечение

В задаче рассматривается сверхзвуковое обтекание летательного аппарата (число Маха > 1), соответствующее мощностному режиму. Для обеспечения максимальной пропускной способности воздухозаборника в нем отсутствуют панели, уменьшающие его сечение. Кроме того, упрощение конфигурации (отсутствие панелей воздухозаборника и некоторых других элементов) связано с тем, что рассматриваемая модель является прототипом летательного аппарата и создавалась в ознакомительных целях.

Для моделирования обтекания летательного аппарата на внешней границы расчетной области задавался «свободный поток» с параметрами: число Маха M , температура $T^\circ \text{K}$, давление P Па. Поверхность объекта задавалась «жесткой стенкой».

Задача решалась на установление течения, в результате чего были получены следующие поля газодинамических величин в срединном сечении (рисунок 3.4.9-3.4.11) и на поверхности (рисунок 3.4.12). Здесь и далее, в следующем параграфе, все величины, а так же поля газодинамических величин приводятся в обезразмеренных значениях.

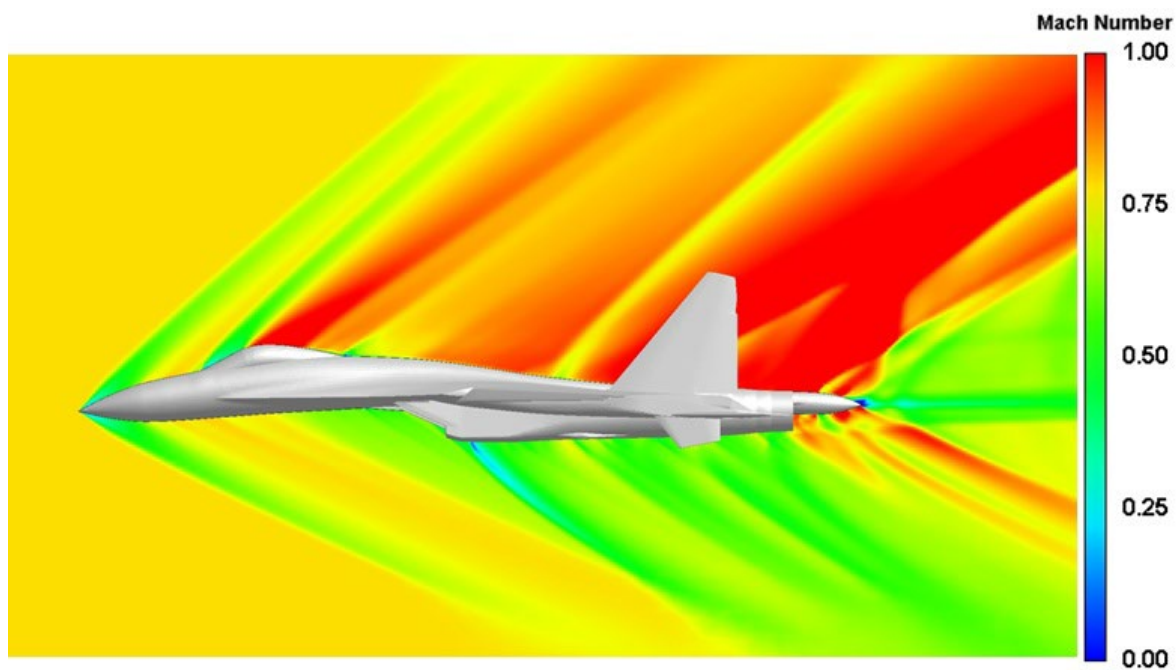


Рисунок 3.4.9 – Поле числа Маха (обезразмеренное)

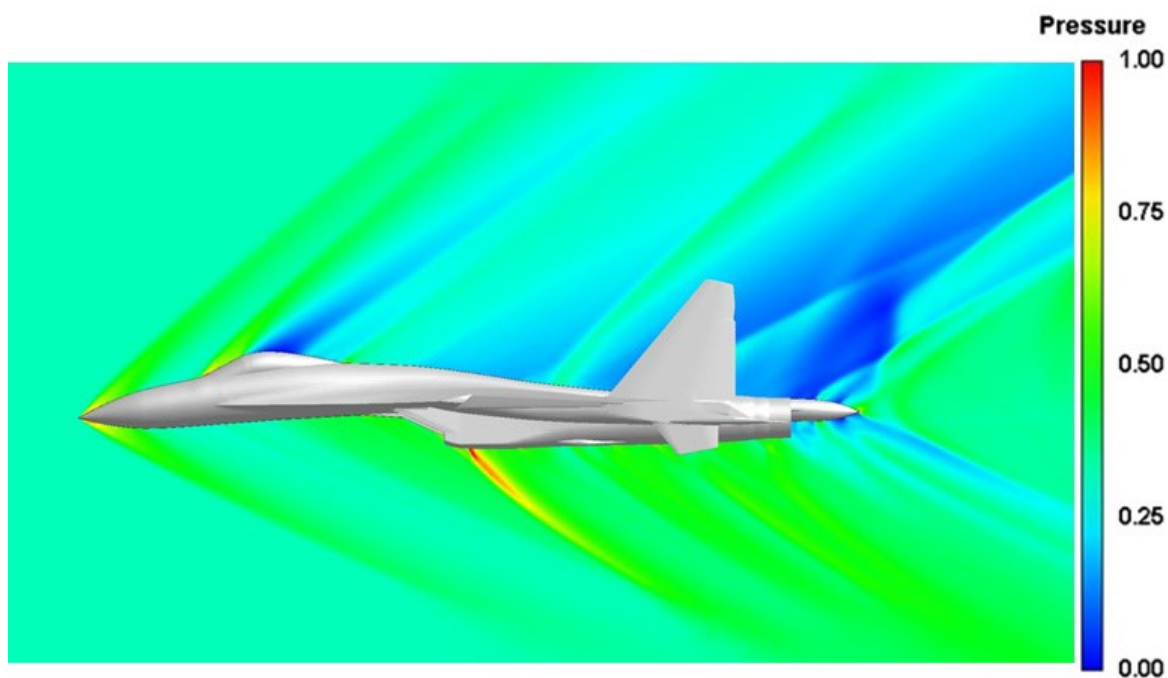


Рисунок 3.4.10 – Поле давления (обезразмеренное)

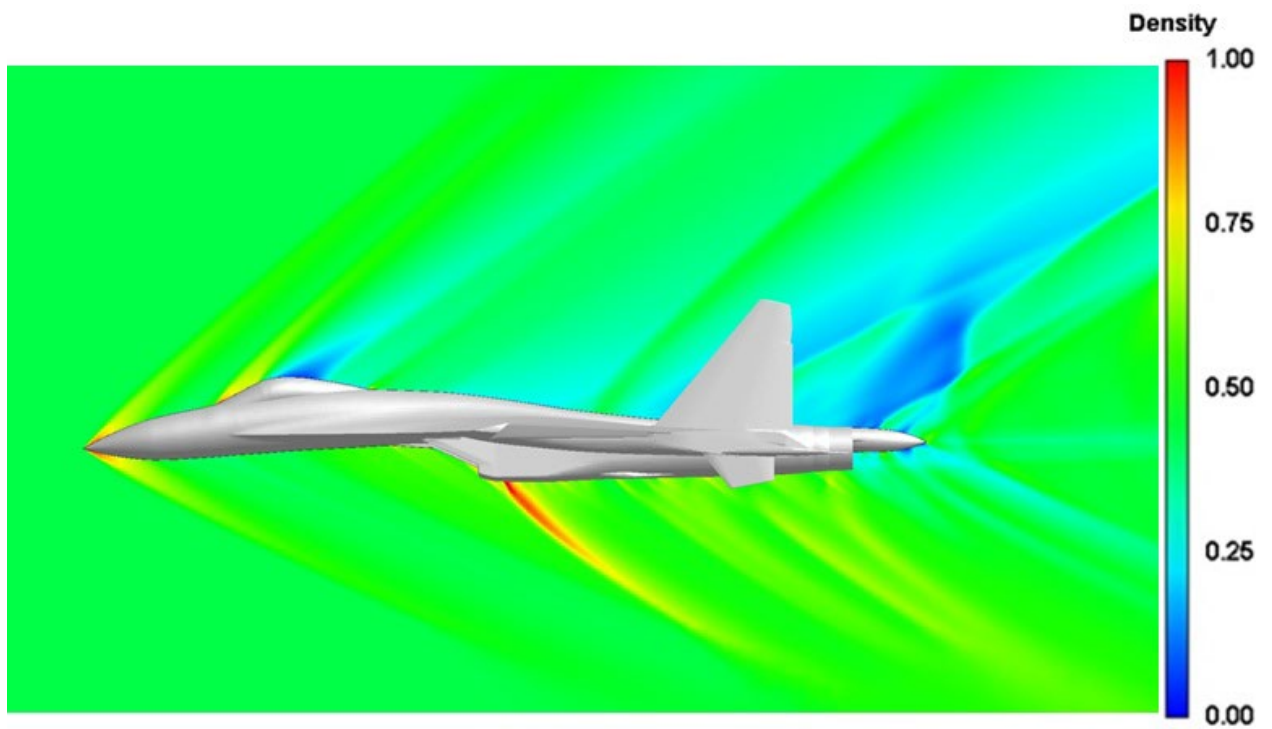


Рисунок 3.4.11 – Поле плотности (обезразмеренное)

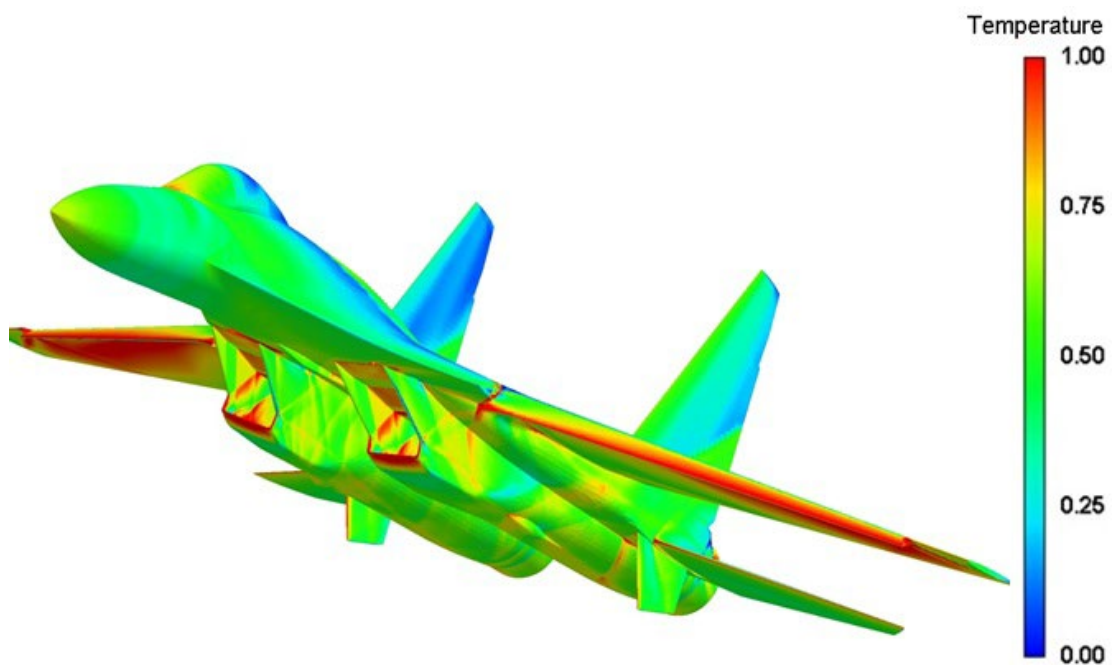


Рисунок 3.4.12 – Поле температуры (обезразмеренное)

При обтекании поверхности летательного аппарата возникают ударные волны – с наибольшей интенсивностью у носовой части и на входе в воздухозаборник двигателя. В задаче использовалась модель, в которой воздухозаборник представлен в виде сквозного канала (рисунок 3.4.13).

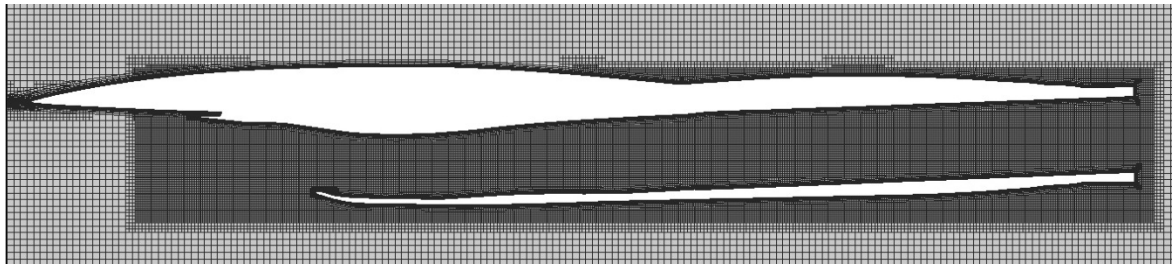


Рисунок 3.4.13 – Область внутри воздухозаборника

При заданных параметрах набегающего потока в канале воздухозаборника формируется течение, показанное на рисунке 3.4.14.

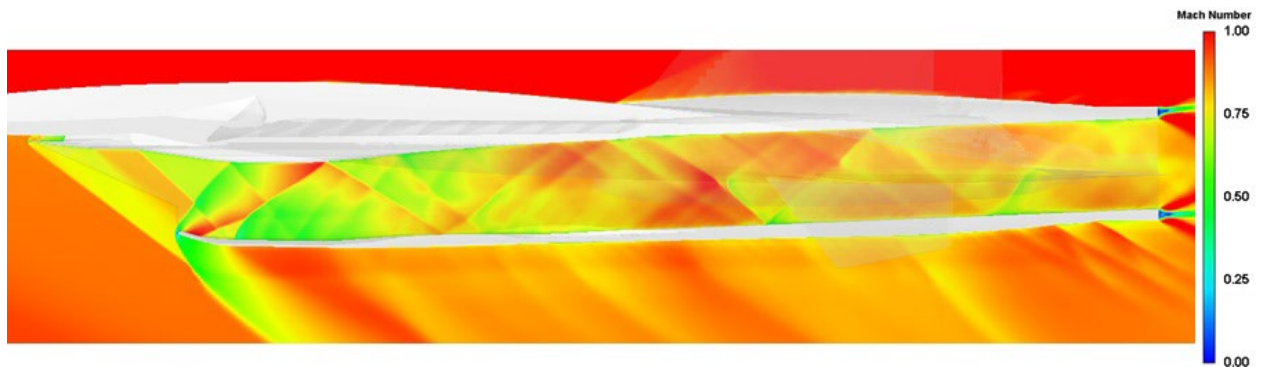


Рисунок 3.4.14 – Структура течения в канале воздухозаборника

В структуре течения наблюдается ударно-волновая картина, аналогичная рассмотренной в предыдущем параграфе.

Кроме того, в рассматриваемой задаче вычисляются аэродинамические коэффициенты. Для получения референсного значения АДХ – использовалась сетка, имеющая в два раза меньший размер ячейки. Полученное на ней решение примем как эталонное, а обезразмеренные значения коэффициента силы лобового сопротивления и коэффициента подъемной силы приведем к единичному виду.

Рассмотрим результаты расчета на сеточной модели в 59 млн ячеек, построенной в рамках диссертационной работы. Здесь отметим, что использование модифицированного ограничителя и гибридного метода вычисления градиентов, описанных в первой главе данной работы, позволили получить более точное решение. Погрешность полученных значений аэродинамических коэффициентов, в сравнении с эталонным результатом, показана в таблице 3.4.1.

Таблица 3.4.1. Обезразмеренные значения коэффициентов подъемной силы и силы лобового сопротивления

Способ вычисления	C_x	C_y	$\Delta, \% (C_x)$	$\Delta, \% (C_y)$
Без использования разработанных схем	0.918	0.932	8.12	6.74
С использованием разработанных схем	0.959	0.971	4.1	2.9

В целях сокращения вычислительного времени при решении задачи использовался метод многосеточной начальной инициализации, что дало увеличению скорости сходимости и сокращении временных затрат до 40%. На рисунке 3.4.15 представлен график сходимости безразмерной силы лобового сопротивления в случае расчета с использованием данного подхода (красная линия) и без него (синяя линия).

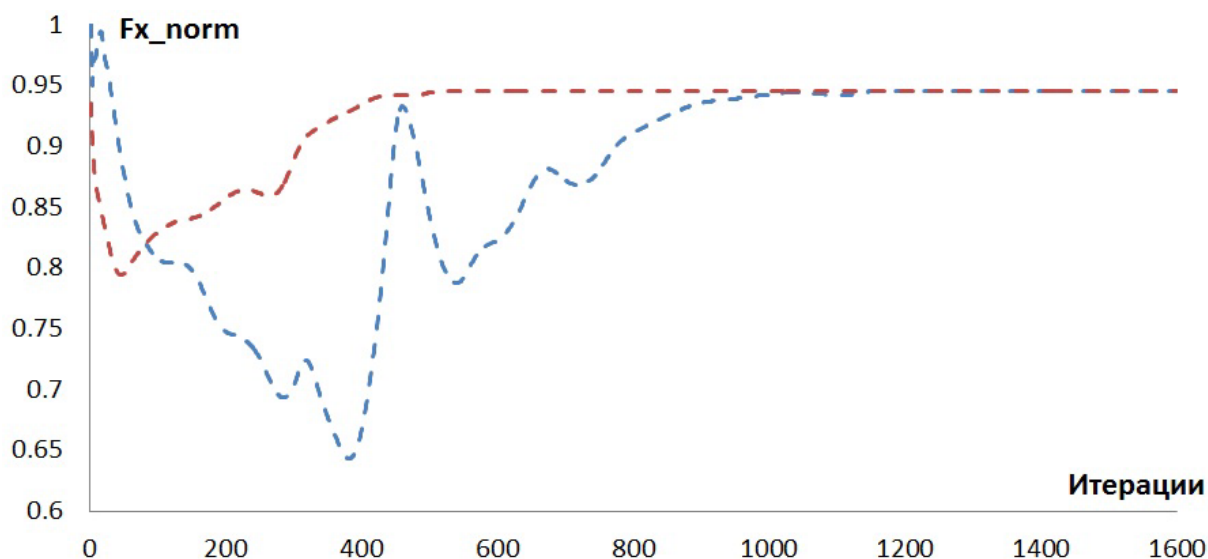


Рисунок 3.4.15– График сходимости силы лобового сопротивления

Таблица 3.4.2. Временные затраты

Способ решения	Время начальной инициализации, с	Число итераций	Общее время, с (время одной итерации 1.7 с)
Без начальной инициализации	-	1200	2040
С начальной инициализацией	172.92	610	1037

Ускорение за счет использования начальной инициализации в данной задаче значительно больше, чем в главе 2. Это объясняется тем, после выполнения процедуры многосеточной инициализации решатель сохранял устойчивость при увеличении числа Куранта с 1 до 50 через каждые 10 шагов. В случае расчета без процедуры получения начального приближения решения устойчивость решателя сохраняется лишь с увеличением числа Куранта через каждые 30 шагов. В рассмотренных же задачах главы 2 расчет проводился при одинаковых параметрах решателя, что в данной задаче выполнить не удалось. Отсюда вытекает дополнительное преимущество использования процедуры многосеточной инициализации – более устойчивый процесс сходимости решения.

3.5 Исследование ударно-волновой картины сверхзвукового летательного аппарата с учетом работы силовой установки

Представленная в работе технология адаптации расчетной сетки позволяет повысить эффективность расчета широкого класса промышленных задач. На примере задачи сверхзвукового обтекания маневренного летательного аппарата [Стручков&Козелков, 2023] (геометрия которого рассматривалась в предыдущем параграфе) покажем применимость численного метода как инструмента при исследовании аэродинамических свойств объекта.

В соответствии с результатами предыдущего параграфа показано, что рассматриваемое течение характеризуется наличием ударных волн, которые реализуются как вблизи поверхности летательного аппарата, так и внутри канала его воздухозаборника. Для качественного разрешения особенностей течения рекомендуется использовать более подробную сеточную модель – например, построенную методом адаптивных сеток.

Область локального измельчения должна соответствовать положению фронта ударной волны. Для ее определения используется критерий адаптации на основе градиента давления (рисунок 3.5.1). Характер распределения критерия, и, следовательно, области локального сгущения, имеют сильно неравномерный характер. Построить подобную область без использования автоматизированного алгоритма достаточно трудоемко.

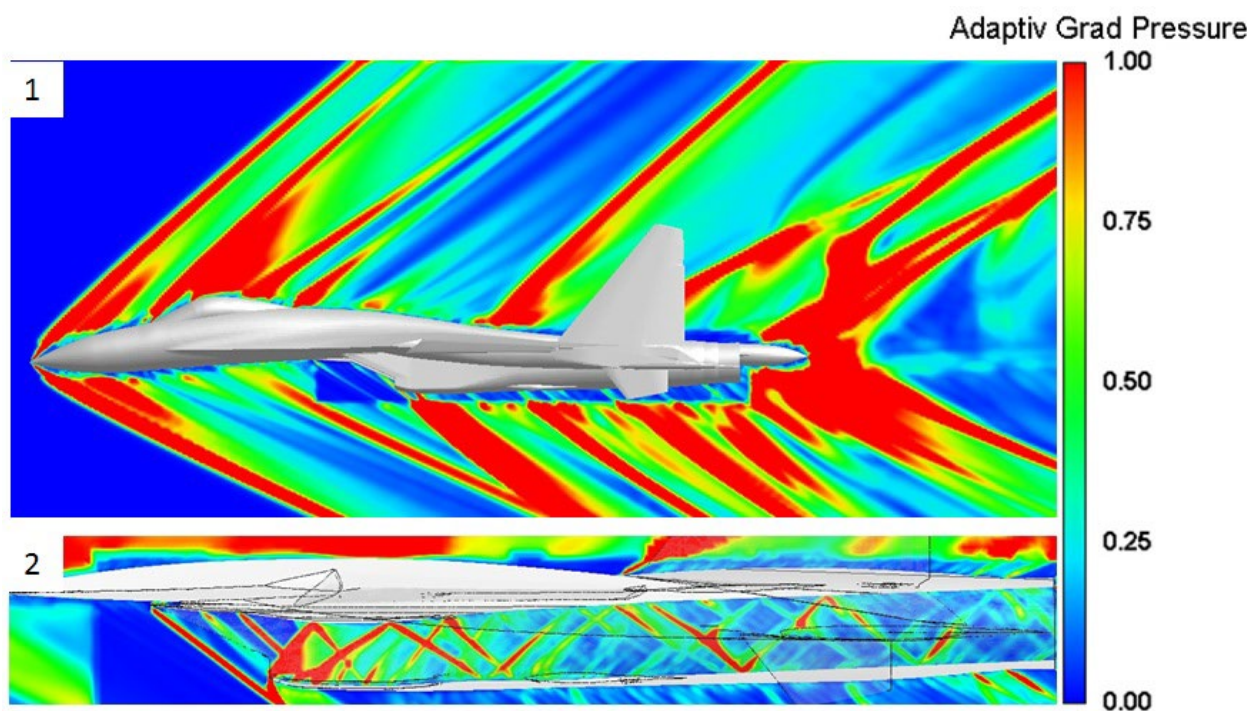


Рисунок 3.5.1 – Поле критерия адаптации на основе градиента давления (1 – вблизи поверхности ЛА, 2 – внутри канала воздухозаборника)

Далее, с использованием алгоритма адаптации сеточной модели, были построены области локального измельчения (рисунок 3.5.2). Более подробная расчетная сетка состоит из ~78 млн ячеек. Область измельчения ограничена габаритами блока вокруг летательного аппарата.

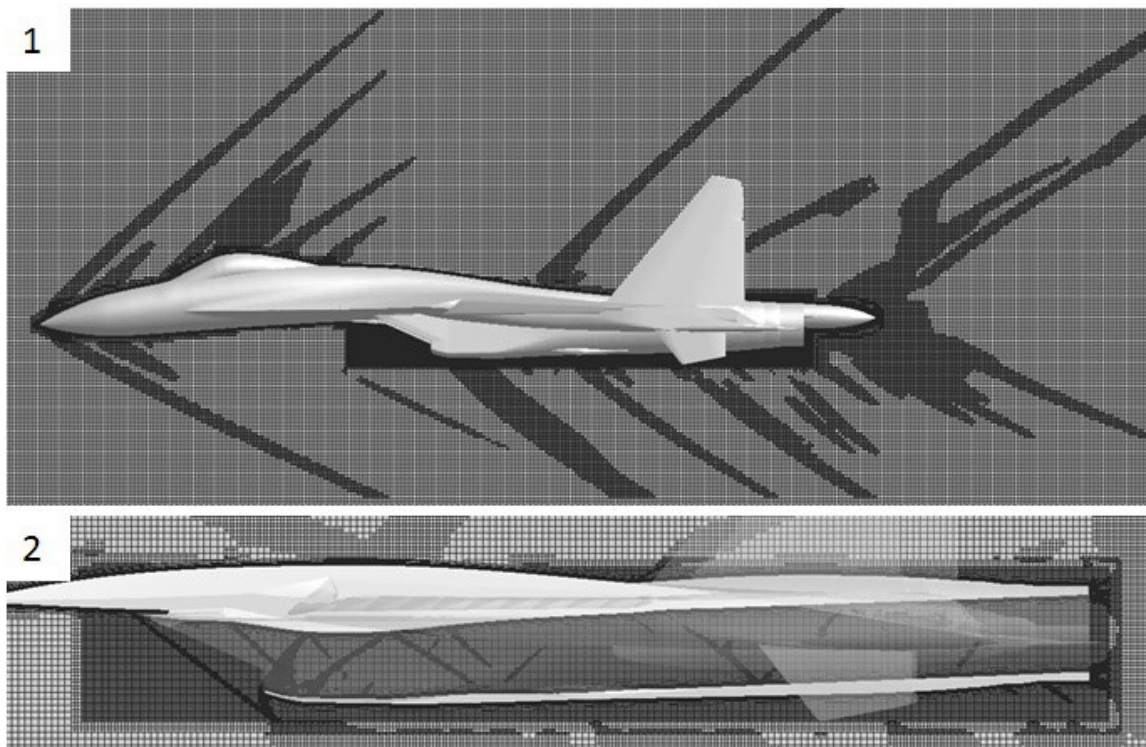


Рисунок 3.5.2 – Сетка с областями локального сгущения (1 – вблизи поверхности ЛА, 2 – внутри канала воздухозаборника)

Поля распределения числа Маха, давления и плотности в различных сечениях дают представление о решении на новой сеточной модели (рисунок 3.5.3-3.5.6).

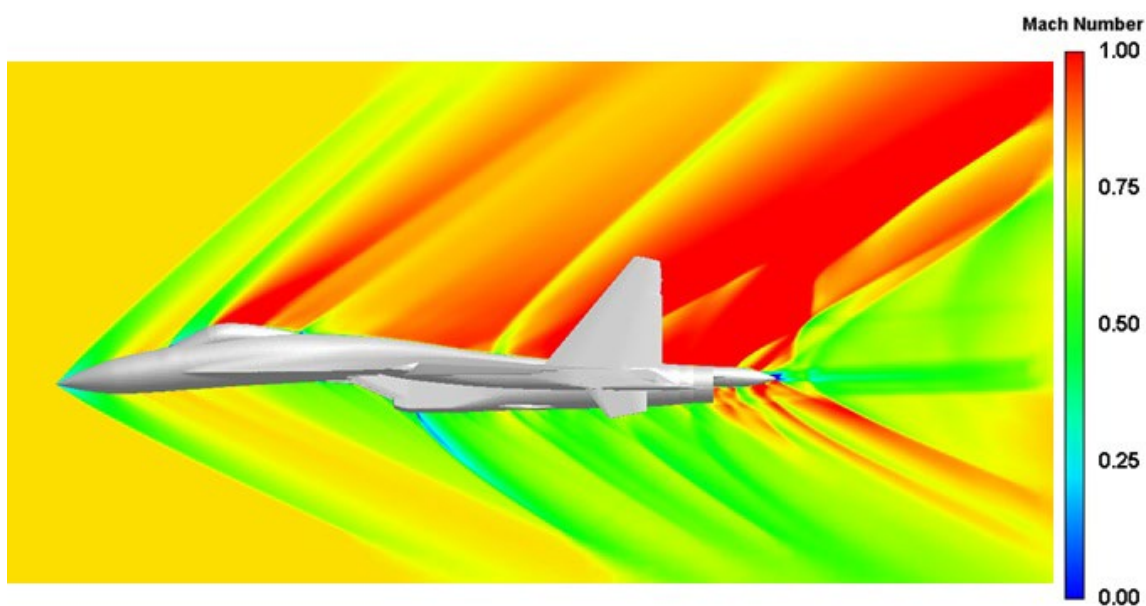


Рисунок 3.5.3 – Поле числа Маха

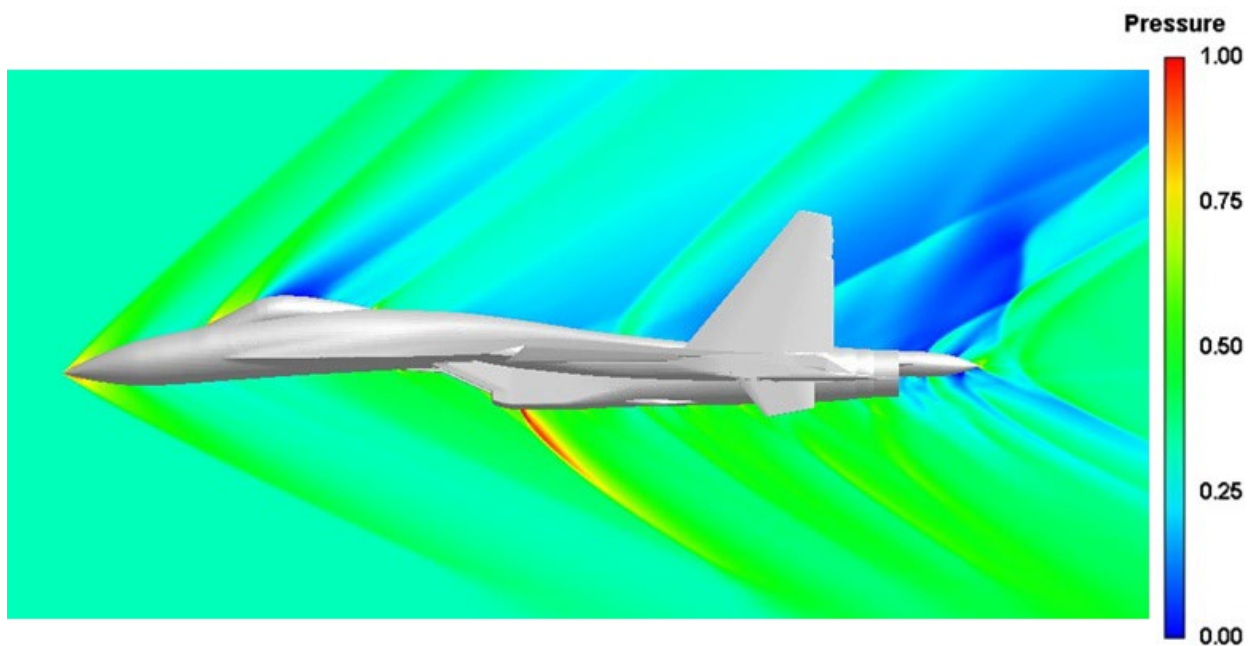


Рисунок 3.5.4 – Поле давления

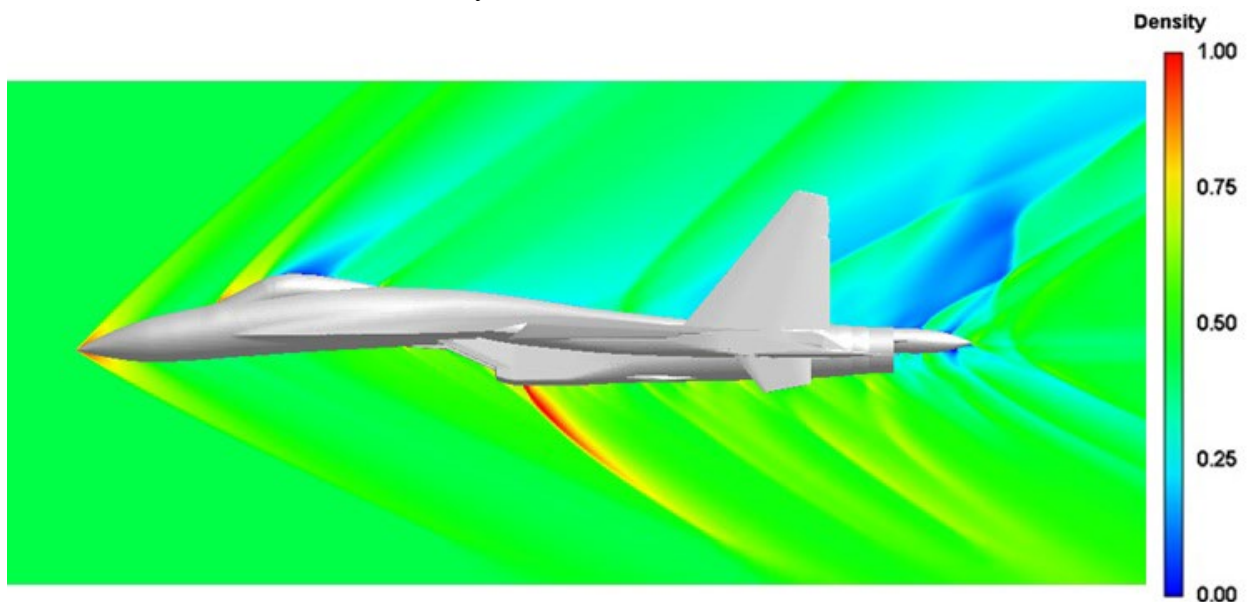


Рисунок 3.5.5 – Поле плотности

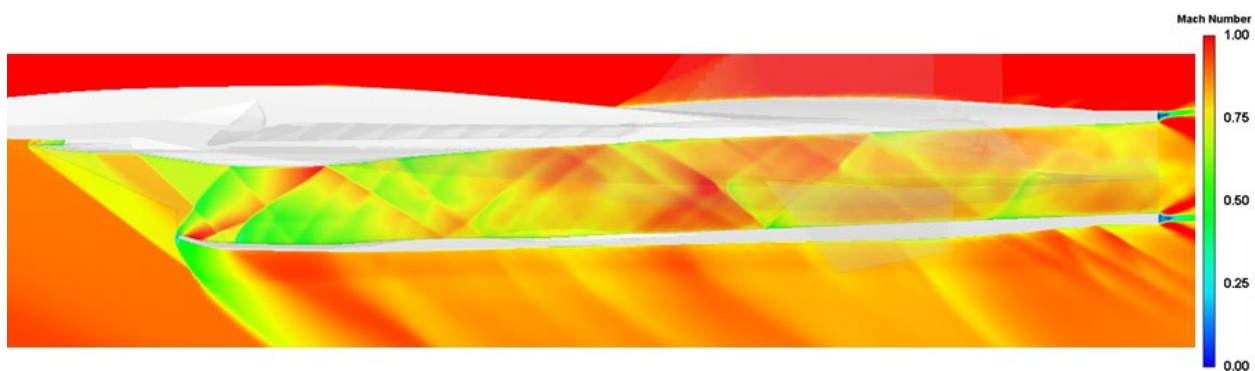


Рисунок 3.5.6 – Поле числа Маха в канале воздухозаборника

Сетка с областями измельчения позволяет более детально прописать структуру ударных волн как вблизи летательного аппарата, так и внутри канала его

воздухозаборника. Согласно полученным результатам, значение коэффициента силы лобового сопротивления и значение коэффициента подъемной силы принимают следующие значения (таблица 3.5.1) (в безразмерных величинах эталонные C_x и C_y равны 1). Для расчета на новой сетке использовалась математическая модель на основе модифицированного ограничителя и гибридного метода вычисления градиента.

Таблица 3.5.1. Значение C_x

Способ вычисления	C_x	C_y	$\Delta, \% (C_x)$	$\Delta, \% (C_y)$
Исходная сетка	0.959	0.971	4.1	2.9
Сетка с областями измельчения	0.971	0.982	2.9	1.8

Основной результат при расчете на более подробной сетке заключается в уточнении значений аэродинамических коэффициентов. Расчет на более подробной сетке привел к более точному решению, и это логично.

Согласно рисунку 3.5.7 – между воздухозаборниками в нижней части ЛА возникает серия скачков, для которой очень важно построить качественную расчетную сетку, так она оказывает значительное влияние на аэродинамику летательного аппарата.

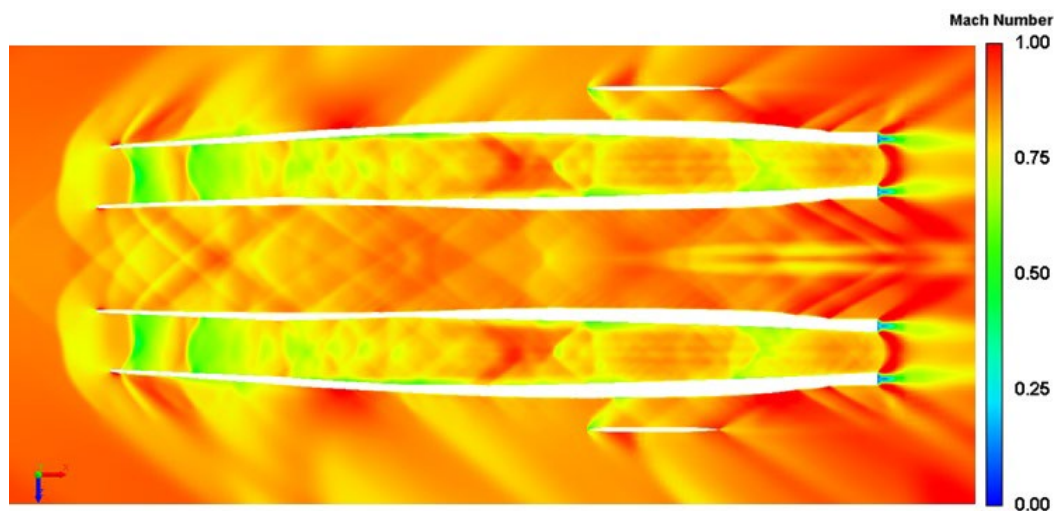


Рисунок 3.5.7 – Структура течения между воздухозаборниками

Здесь преимущество рассмотренного подхода заключается в автоматизации построения областей локального измельчения, с точностью до заданного значения критерия адаптации, повторяющего фронт ударной волны. Эффективность такого способа построения в сравнении с «ручным» методом с использованием геометрических примитивов в качестве формы контрольных областей была рассмотрена в параграфе 2.5, откуда значение эффективности было получено равное 20%.

Проведем исследование данной задачи при условии включенной силовой установки, добавив новые граничные условия (рисунок 3.5.8).



Рисунок 3.5.8 – Расчетная сетка в случае учета работы силовой установки

Работающий двигатель оказывает значительное влияние на формирование потоков вблизи объекта. Положение панелей воздухозаборника определяет параметры потока на входе в двигатель и определяет течение в нижней части ЛА, так же как и струя горячего газа на выходе из двигателя (рисунок 3.5.9).

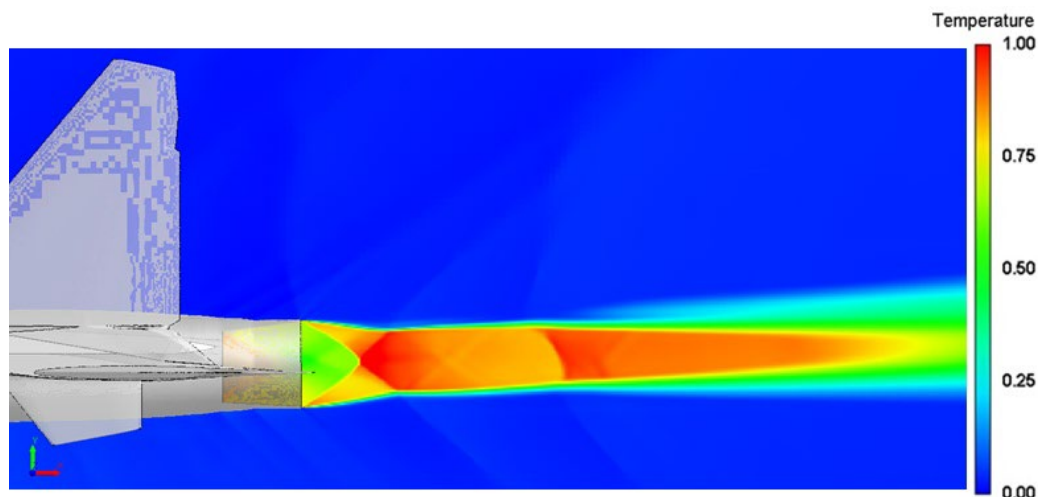


Рисунок 3.5.9 – Поле температуры на выходе из двигателя

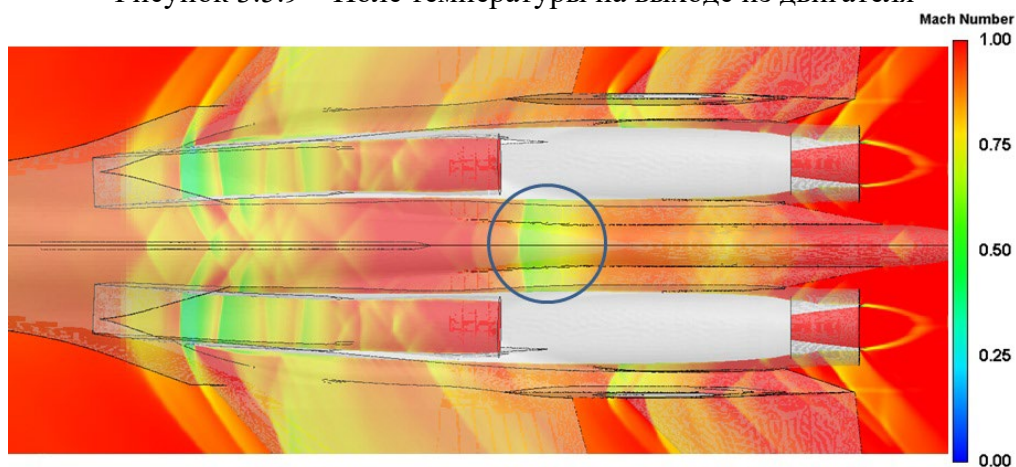


Рисунок 3.5.10 – Поле числа Маха

На рисунке 3.5.10 отмечена область запираания потока, образованная в результате ударно-волнового характера течения между воздухозаборниками. Уменьшение такой области может улучшать аэродинамические характеристики летательного аппарата.

Рассмотрим возможность изменения области торможения потока в результате добавления на внутреннюю поверхность воздухозаборников аэродинамических щитков (рисунок 3.5.11).



Рисунок 3.5.11 – Дополнительные элементы на поверхности воздухозаборника

На основе модифицированной геометрии построена расчетная сетка, параметры которой соответствуют начальной. На рисунке 3.5.12 показаны силы лобового сопротивления в случае расчета с учетом силовой установки на исходной геометрии и геометрии с добавленными элементами на воздухозаборнике.

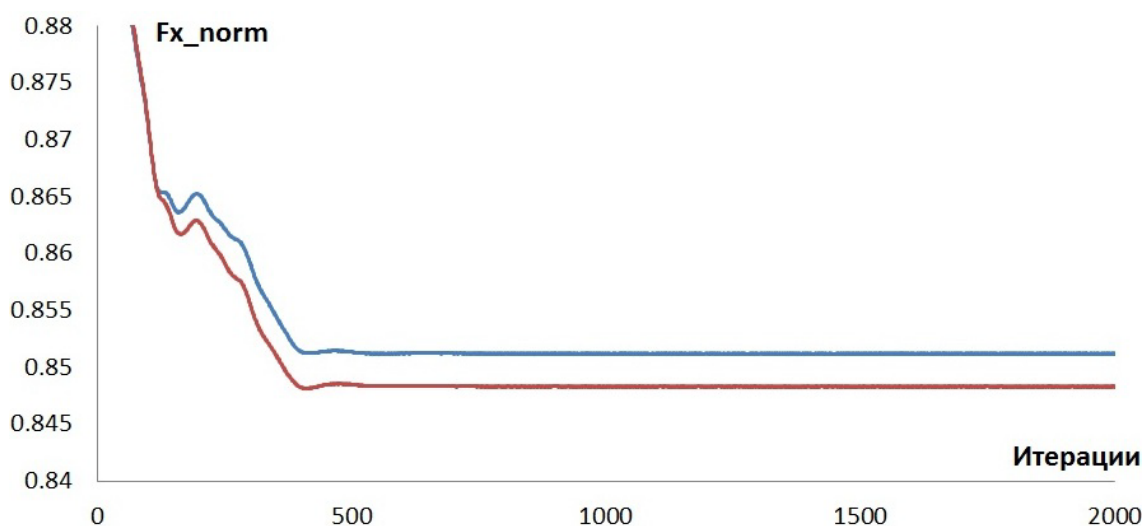


Рисунок 3.5.12 – График сил лобового сопротивления по итерациям (синяя линия – расчет на исходной геометрии, красная – на геометрии с добавленными элементами)

Далее на рисунке 3.5.13 показано поле числа Маха между воздухозаборниками с учетом дополнительных элементов.

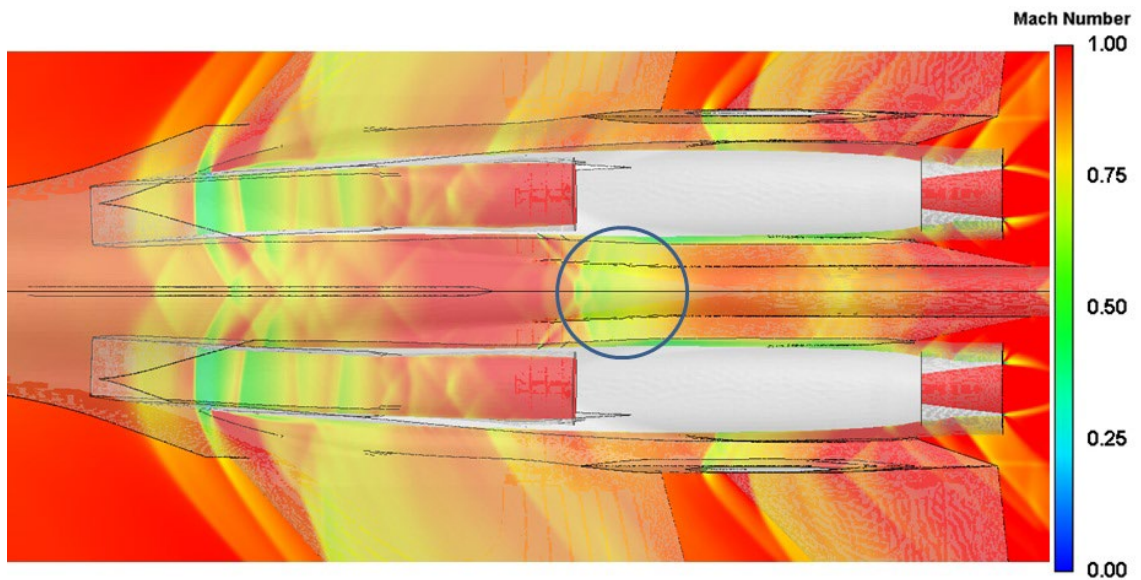


Рисунок 3.5.13 – Структура течения между воздухозаборниками

В результате обтекания аэродинамических щитков в потоке формируется две новые ударные волны, приводящие к рассеиванию застойной зоны (рисунок 3.5.14).

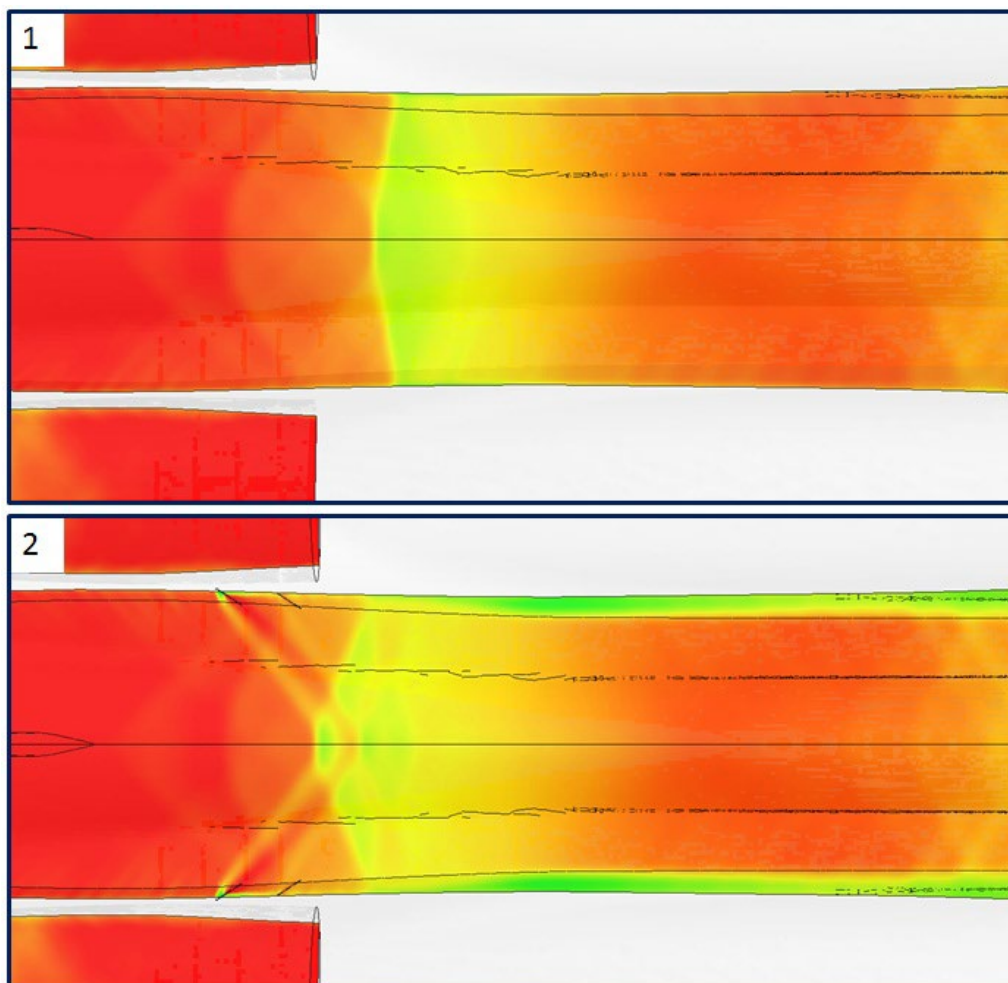


Рисунок 3.5.14 – Течение между воздухозаборниками (1 – исходная геометрия, 2 - модифицированная)

В результате получено, что добавление новых элементов приводит к изменению аэродинамических характеристик исследуемого объекта. Применяемый численный метод позволил определить изменение, как в общем значении силы лобового сопротивления, так и локальное формирование новых структур, приводящих к перераспределению полей газодинамических величин.

Таким образом, показано, что представленный в диссертационной работе численный метод в совокупности с разработанными схемами и алгоритмами может быть использован как инструмент при решении задач внешней и внутренней аэродинамики для получения аэродинамических характеристик ЛА, моделировать различные авиационные компоновки и оптимизировать их характеристики. Особенно это актуально на этапе проектировании перспективных образцов в авиационной промышленности, где проведение каждого натурального эксперимента или тестового вылета связано как с финансовыми затратами, так и с риском для летной команды.

3.6 Заключение

В главе рассмотрены задачи сверхзвукового течения в канале и обтекание прототипа сверхзвукового маневренного летательного аппарата. В результате применения методов и алгоритмов, представленных в диссертационной работе, удалось получить и исследовать особенности формирования ударно-волновой картины, возникающей при заданных условиях.

Получено, что применение модифицированного ограничителя потока и предложенного гибридного метода расчета градиентов способствуют повышению точности решения и это показано на примере расчета АДХ летательного аппарата. К тому же, совместно с сеточными алгоритмами, предложенными в работе, решение рассматриваемой задачи было получено за меньшее время, что подтверждает повышение эффективности.

Отдельно рассмотрена задача формирования и распространения ударной волны в канале, где исследованы особенности ее взаимодействия с пристеночным течением. На примере задачи показано влияние изменения геометрии канала на распределение локальных аэродинамических характеристик. Далее аналогичный подход по изменению геометрии применен к летательному аппарату, где на внешней стенке воздухозаборника добавлялись аэродинамические панели.

В рассматриваемых задачах методы и алгоритмы диссертационной работы являются инструментом, позволяющим выполнять проектно-научное исследование сверхзвукового обтекания различных объектов. Предлагаемый инструмент способствует быстрому и надежному решению задачи, возникающей на этапе проектирования перспективных образцов авиационной промышленности, а так же существенному сокращению времени их отработки, заменив проведение натурного эксперимента применением математического моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертации:

1. Исследована ударно-волновая структура течения при сверхзвуковом обтекании тел различной конфигурации на произвольной неструктурированной сетке. Получено достоверное описание ударных волн при их отражении и взаимодействии с пограничным слоем, а также характеристики распределения газодинамических величин в зависимости от параметров течения, включая случаи внедрения дополнительных механических элементов.
2. Исследована применимость ограничителя потока при расчете на неструктурированной сетке. Разработана и реализована модифицированная схема расчета ограничителя потока. Проведена калибровка и получено значение константы, входящей в выражение, определяющего порог срабатывания ограничителя. Показано повышение точности расчета и возможность достоверно воспроизводить поведение ударной волны в процессе ее распространения в газовой среде при использовании разработанной схемы расчета ограничителя на различных сетках.
3. Исследованы свойства метода Грина-Гаусса и метода наименьших квадратов для расчета градиента с целью выявления зависимости точности получаемого значения от формы расчетной ячейки. Разработана и реализована гибридная схема расчета градиента с использованием весовой функции. Разработана весовая функция, учитывающая геометрические особенности расчетной ячейки. Показано повышение точности решения и достоверности моделирования процессов сверхзвукового течения газа при использовании разработанной схемы на различных сетках.
4. Разработан и реализован метод, основанный на алгоритме построения последовательности грубых сеток, для инициализации поля течения газодинамическими параметрами. Для моделирования сверхзвукового обтекания на произвольной неструктурированной сетке и получения распределения газодинамических величин показано ускорение сходимости решения при использовании данного метода.
5. Разработан и реализован метод статической адаптации расчетной сетки. Показано повышение достоверности моделирования сверхзвукового течения вследствие увеличения точности разрешения фронта ударных волн при расчете на сетке, полученной в результате применения алгоритма адаптации.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, включенных в список ВАК и/или входящих в мировые индексы цитирования (SCOPUS, Web of Science):

- СВ1 Жалнин Р.В., Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Козелков А.С., Стручков А.В. Пакет программ Логос. Методика повышенного порядка точности на блочно-структурированных сетках с использованием реконструкции типа WENO // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6.
- СВ2 Жалнин Р.В., Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Козелков А.С., Стручков А.В. Пакет программ ЛОГОС. Методики расчета течения вязкого сжимаемого газа на блочно-структурированных сетках // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. С. 667.
- СВ3 Стручков А.В., Козелков А.С., Жучков Р.Н., Уткина А.А., Саразов А.В. Численное моделирование задач аэродинамики со статической адаптацией сетки под особенности решения // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2019. – Вып.2. – С. 55-67.
- СВ4 Struchkov A.V., Kozelkov A.S., Volkov K., Kurkin A.A., Zhuchkov R.N., Sarazov A.V. Numerical simulation of aerodynamic problems based on adaptive mesh refinement method. Acta Astronaut. 2020, 172, 7–15; DOI: 10.1016/j.actaastro.2020.03.019.
- СВ5 Стручков А.В. Применение метода геометрической многоуровневой инициализации для ускорения решения задач аэродинамики на произвольных неструктурированных сетках. Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2021. № 4 (135). С. 32-42.
- СВ6 Kozelkov A.S., Struchkov A.V., Strelets D.Y. Two Methods to Improve the Efficiency of Supersonic Flow Simulation on Unstructured Grids // Fluids 2022, 7, 136, DOI: 10.3390/fluids7040136.
- СВ7 Struchkov, A., Kozelkov, A., Zhuchkov R, Volkov, K., Strelets D. Implementation of Flux Limiters in Simulation of External Aerodynamic Problem on Unstructured Meshes. Fluids 2023, 8(1), 31; DOI: 10.3390/fluids8010031
- СВ8 Стручков А.В., Козелков А.С. Применение САЕ-моделирования для исследования формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом течении. Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2023. № 2 (141).

Публикации в трудах конференций:

- ТК1 Володченкова К.Б., Козелков А.С., Жучков Р.Н., Стручков А.В. Особенности моделирования ламинарно-турбулентного перехода в пакете программ Логос. В книге: XXV Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям. 2018. С. 64-65.
- ТК2 Стручков А.В., Козелков А.С., Жучков Р.Н., Куркин А.А., Уткина А.А. Численное моделирование задач аэродинамики со статической адаптацией сетки под особенности решения. В сборнике: Информационные системы и технологии -

2019. Сборник материалов XXV Международной научно-технической конференции. 2019. С. 932-937.

- ТК 3 Стручков А.В., Козелков А.С., Стрелец М.Ю. Особенности применения метода геометрической многоуровневой инициализации для ускорения решения задач аэродинамики на произвольных неструктурированных сетках. В книге: 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Тезисы 19-ой Международной конференции. Москва, 2020. С. 614-615.
- ТК 4 Стручков А.В., Козелков А.С. Особенности применения метода геометрической многоуровневой инициализации для ускорения решения задач аэродинамики на произвольных неструктурированных сетках. В сборнике: КОГРАФ-2021. Сборник материалов 31-й Всероссийской научно-практической конференции по графическим информационным технологиям и системам. Нижний Новгород, 2021. С. 270-276.
- ТК5 Стручков А.В., Козелков А.С., Жучков Р.Н. Алгоритмы повышения эффективности расчета сверхзвуковых течений на произвольных неструктурированных сетках. В сборнике: 1-я Международная научно-техническая конференция «Скоростной транспорт будущего: перспективы, проблемы, решения». Алушта, 2022.
- ТК6 Стручков А.В., Жучков Р.Н., Козелков А.С. Гибридный метод вычисления градиентов и метод расчета ограничителей градиента для повышения точности решения задач аэродинамики на неструктурированных сетках. В сборнике: «Марчуковские Научные чтения-2022», Новосибирск, 2022.
- ТК7 Стручков А.В., Жучков Р.Н., Козелков А.С. Метод расчета ограничителей потока и гибридный метод вычисления градиентов для повышения точности решения задач аэродинамики на неструктурированных сетках. В сборнике материалов 20-й научно-технической конференции «Молодежь в науке», Саров, 2022.
- ТК8 Стручков А.В., Жучков Р.Н., Козелков А.С. Методика расчета сверх- и гиперзвуковых течений на произвольных неструктурированных сетках. В сборнике материалов I Всероссийской молодежной школы-семинара по математическому моделированию на супер-ЭВМ экса- и зеттафлопсной производительности, 5-9 декабря 2022 года.
- ТК9 Стручков А.В., Жучков Р.Н., Козелков А.С. Исследование ударно-волновой структуры сверхзвукового обтекания клина и летательного аппарата. В сборнике материалов XIII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 21-25 августа 2023 года.

Свидетельства о регистрации:

- СР1 Козелков А.С., Жучков Р.Н., Курулин В.В. и др. Программа для ЭВМ «Программа расчета нестационарных отрывных турбулентных течений и генерируемых ими акустических полей для нужд авиационной промышленности» от 18.07.2013 № 2013619176

- CP2 Дерюгин Ю.Н., Козелков А.С. и др. Программа для ЭВМ «Пакет программ «ЛОГОС», версия 5.0» от 20.02.2017 №2017612306.
- CP3 Дерюгин Ю.Н., Козелков А.С. и др. Программа для ЭВМ «Программный модуль пакета программ «ЛОГОС» для моделирования аэрогидродинамики и теплопереноса (ЛОГОС-ТМП), версия 2016» от 11.01.2018 №2018610488.
- CP4 Дерюгин Ю.Н., Козелков А.С. и др. Программа для ЭВМ «Пакет программ «ЛОГОС», версия 2017» от 04.03.2019 №2019612914.
- CP5 Дерюгин Ю.Н., Козелков А.С. и др. Программа для ЭВМ «Программный модуль пакета программ «ЛОГОС» для моделирования аэрогидродинамики и теплопереноса (ЛОГОС-ТМП), версия 2017» от 30.01.2019 №201961155.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абалакин И.В., Дервье А., Козубская Т.К., Уваров Х.. Методика повышения точности при моделировании переноса акустических возмущений на неструктурированных сетках, - Ученые записки ЦАГИ, т. X, №1, (2010).
2. Абалакин И. В., Козубская Т. К., Схема на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных для решения задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках, Матем. моделирование, 2013, том 25, номер 8, 109–136.
3. Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К.. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES Области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений // Математическое моделирование, 2011 год, том 23, номер 7, стр. 3-19
4. Баракнин В.Б., Карамышев В.Б. TVD-схема на подвижной адаптивной сетке // Журнал «Вычислительные технологии», 2000, том 5, № 1.
5. Башкин В.А., Егоров В.И., Иванов Д.В. Применение метода ньютона к расчету внутренних сверхзвуковых отрывных течений // Прикладная математика и техническая физика, 1997, т.38, №1.
6. Башкин В.А., Егоров В.И., Иванов Д.В. Сверхзвуковое течение вязкого газа в плоском канале при больших числах Рейнольдса // Теплофизика высоких температур, 2001, том 39, №1, с. 115-122.
7. Башкин В.А., Егоров В.И., Иванов Д.В. Торможение сверхзвукового потока в плоских и осесимметричных каналах // Механика жидкости и газа, №2, 1998.
8. Бедарев И.А., Федоров А. В. Тестирование метода адаптивных сеток на расчетах одномерных детонационных волн // Журнал «Вычислительные технологии», 2009 год, том 14, № 3.
9. Бекетаева А.О., Моисеева Е.С., Найманова А.Ж.. Численное моделирование взаимодействия ударной волны с пограничным слоем в плоском сверхзвуковом потоке со вдувом струи // Теплофизика и аэромеханика, 2016, том 23, № 2
10. Белошенко Б.Г., Волков В.Е., Куршаков М.Ю., Маринин В.П., Остапович О.Н., Шилиев В.И., Жигалов В.Н., Цветков Г.Г. Экспериментальные исследования газодинамики и теплообмена с использованием модели межблокового отсека ракеты-носителя при «горячем» разделении второй и третьей ее ступеней // Космонавтика и ракетостроение. — 2002. Вып. 3 (28).

11. Боровой В.Я. Проблемы экспериментальных исследований в аэрогазодинамических трубах кратковременного действия // Тр. Второй Рос. нац. конф. по теплообмену. Т. 1. — М.: Изд-во МЭИ, 1998.
12. Борисенко О.Н., Смолкина Д.Н., Черенкова М.В., Гиниятуллина А.Г., Кузьменко М.В., Чухманов Н.В., Потехина Е.В., Попова Н.В., Турусов М.Р. Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ «ЛОГОС» // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2018. – Вып.2. – С. 25-39.
13. Бражко В.Н., Ваганов А.В., Нейланд В.Я., Ковалева Н.А. Экспериментальное исследование особенностей течения около наветренной стороны треугольного крыла с затупленными передними кромками при гиперзвуковых скоростях потока. Модели и методы аэродинамики. – Материалы Десятой Международной школы-семинара. – М.: МЦНМО, 2010. – 200 с.
14. Булат П.В., Волков К.Н. Применение WENO-схем для моделирования взаимодействия отраженной ударной волны с пограничным слоем // Инженерно-физический журнал, 2015, том 88, № 5.
15. Булат П.В., Денисенко П.В., Продан Н.В. Интерференция встречных скачков уплотнения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 2. С. 346–355.
16. Булат П.В., Денисенко П.В., Продан Н.В., Упырев В.В. Гистерезис интерференции встречных скачков уплотнения при изменении числа Маха // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 5. С. 930–941.
17. Булат П.В., Упырев В.В., Денисенко П.В. Отражение косоугольного скачка уплотнения от стенки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Том 15. № 2. С. 338–345.
18. Ваганов А.В., Нейланд В.Я., Стародубцев М.А., Шалаев В.И. Моделирование особенностей обтекания наветренной стороны треугольного крыла с затупленными передними кромками на основе численного решения уравнений Навье-Стокса. Модели и методы аэродинамики. Материалы Десятой Международной школы-семинара. – М.: МЦНМО, 2010. – 200 с.
19. Вальгер С.А., Фёдорова Н.Н. Применение алгоритма адаптации расчетной сетки к решению уравнений Эйлера // Журнал «Вычислительные технологии», 2012 г, том 17, №3.

20. Власов В. И., Горшков А. Б. Сравнение результатов расчетов гиперзвукового обтекания затупленных тел с летным экспериментом OREX // Изв. РАН. МЖГ. — 2001. №5.
21. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С., Тетерина И.В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. – Москва: Физматлит, 2013, 536 с
22. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Смирнов П.Г., Тетерина И.В. Реализация метода конечных объемов и расчет течений вязкого сжимаемого газа на графических процессорах // журнал «Выч. мет. программирование». – 2013. – Т. 14, №1. – С. 183-194.
23. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Современные подходы к моделированию турбулентности. Издательство Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2016.
24. Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 248 с.
25. Горобец А.В., Козубская Т.К. Технология распараллеливания явных высокоточных алгоритмов вычислительной газовой динамики и аэроакустики на неструктурированных сетках, - Математическое моделирование, т. 19, No 2, (2007), стр. 68-86
26. Грудницкий В. Г., Мендель М. А. Характеристическая консервативная форма законов сохранения и устойчивые, монотонные вычислительные схемы для исследования разрывных течений // Электронный журнал «Труды МАИ», выпуск № 67
27. Егоров И.В., Новиков А. В. Численное моделирование сверхзвукового обтекания угла сжатия // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Т. VI (XLVII Научная конференция МФТИ, Жуковский, 26–27 нояб. 2004). — 2004. — С. 19–20.
28. Егоров И.В., Новиков А.В., Фёдоров А.В. Численное моделирование распространения возмущений в сверхзвуковом пограничном слое с локальным отрывом // Актуальные проблемы развития отечественной космонавтики (XXIX Академические чтения по космонавтике, Москва, 25–26 янв. 2005). — М., 2005. — С. 156–157.
29. Егоров И.В., Новиков А.В., Фёдоров А.В. Численное моделирование возмущений отрывного течения в закругленном угле сжатия // Механика жидкости и газа // №4, 2006.
30. Жалнин Р.В., Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Козелков А.С., Стручков А.В. Пакет программ Логос. Методика повышенного порядка точности на блочно-

- структурированных сетках с использованием реконструкции типа WENO // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6.
31. Жалнин Р.В., Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Козелков А.С., Стручков А.В. Пакет программ ЛОГОС. Методики расчета течения вязкого сжимаемого газа на блочно-структурированных сетках // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. С. 667.
32. Землянский Б.А., Кислых В.В., Маринин В.П. Возможности и результаты экспериментальных исследований теплообмена на моделях летательных аппаратов в гиперзвуковых поршневых аэродинамических трубах // Межд. конф. «Фундаментальные проблемы высокоскоростных течений». — Жуковский, Моск. обл., 2004.
33. Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И., Горшков А.Б., Залогин Г.Н., Ковалев Р. В., Маринин В.П., Мурзинов И.Н. Конвективный теплообмен летательных аппаратов // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 380 с.
34. Козелков А.С., Жучков Р.Н., Уткина А.А., Володченкова К.Б. Моделирование турбулентных течений на сетках гибридной структуры с использованием схем высокого порядка точности // Журнал ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов, 2014, вып.3 стр. 18-31.
35. Козелков А.С., Корнев А.В., Стрелец Д.Ю., Танненберг И.А., Останко А.А., Расчетные исследования аэродинамических характеристик сверхзвукового самолета на крейсерских режимах полета // Полет. Общероссийский научно-технический журнал, 2017, №6, с. 17-21 (а).
36. Козелков А.С., Крутякова О.Л., Курулин В.В., Лашкин С.В., Тятюшкина Е.С. Применение численных схем с выделением пограничного слоя для расчета турбулентных течений с использованием вихререзающих подходов на неструктурированных расчетных сетках // Вычислительная математика и математическая физика, 2017, том 57, № 6, с. 1048–1060 (б).
37. Колесников Г.А., Марков В.К., Михайлюк А.А. Аэродинамика летательных аппаратов. Под редакцией Г.А. Колесникова. М.: Машиностроение, 1993 – 544 стр.
38. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. Издательство: Машиностроение. Год: 1964. Стр.: 573
39. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
40. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.

41. Лисейкин В.Д., Паасонен В.И. Адаптивные сетки и высокоточные схемы для решения сингулярно-возмущенных задач // Сиб. журнал вычисл. матем. 2021. Т. 24. № 1. С. 77–92.
42. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1979. – 904 с.
43. Лунёв В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. — М.: Физматлит, 2007.
44. Максимов Ф. А. Аэродинамическое взаимодействие двух тел в сверхзвуковом потоке // Сб. мат. Межд. научн. конф. «Проблемы баллистики». Т. 2. — СПб.: БГТУ, 2006. — С. 44–48.
45. Максимов Ф. А., Шевелев Ю. Д. Использование гибридных сеток для решения задач аэродинамического проектирования // «Супервычисления и математическое моделирование. Труды XIII межд. семинара». — Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2012. — С. 330–338.
46. Никитин В. А., Шурыгин А. В., Новиков И. Г., Егоров А. В., Соколов С. С., Панов А. И. Программный модуль генерации замкнутой поверхностной триангуляционной сетки в пакете программ ЛОГОС // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2021. Вып. 2. С. 70–79
47. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990. – 664 с.
48. Пилипенко А. А., Полевой О. Б., Приходько А. А. Численное моделирование влияния числа Маха и угла атаки на режимы трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамических профилей // Ученые записки ЦАГИ, 2012, том XLIII, № 1, 1 — 110.
49. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. 2-е изд. доп. Л., «Машиностроение», 1976 – 504 с.
50. Погосян М.А., Савельских Е.П., Шагалиев Р.М., Козелков А.С., Стрелец Д.Ю., Рябов А.А., Корнев А.В., Дерюгин Ю.Н., Спиридонов В.Ф., Циберев К.В. Применение отечественных суперкомпьютерных технологий для создания перспективных образцов авиационной техники // Журнал ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов, 2013, вып.2, стр. 3-17.
51. Цифровые технологии в жизненном цикле российской авиационной техники: Монография // под редакцией М.А. Погосяна – М.: Изд-во МАИ, 2020, 448 стр.
52. Саху Дж., Дэнберг Дж.Э. Расчеты трансзвуковых течений на основе уравнений Навье-Стокса и дифференциальной двухпараметрической модели турбулентности // Аэрокосмич. техн. – 1987. – № 7. – С. 3-12.
53. Савин Г.И., Четверушкин Б.Н., Суков С.А., Горобец А.В., Козубская Т.К., Вдовикин О.И., Шабанов Б.М.. Моделирование задач газовой динамики и аэроакустики с

- использованием ресурсов суперкомпьютера МВС-100К, - Доклады академии наук, том 423, No3, (2008), стр. 312-315
54. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости. – 2004. – № 2. – С. 1-22.
55. Стручков А.В., Козелков А.С., Жучков Р.Н., Уткина А.А., Саразов А.В. Численное моделирование задач аэродинамики со статической адаптацией сетки под особенности решения. ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019, выпуск 2, с.55-67.
56. Стручков А.В. Применение метода геометрической многоуровневой инициализации для ускорения решения задач аэродинамики на произвольных неструктурированных сетках. Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2021. № 4 (135). С. 32-42.
57. Стручков А.В., Козелков А.С. Применение CAE-моделирования для исследования формирования ударно-волновой структуры при сверхзвуковом течении. Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2023. № 2.
58. Тирский Г.А., Сахаров В.И., Ковалев В.Л., Власов В.И. и др. Гиперзвуковая аэродинамика и тепломассообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов // М.: Физматлит, 2011, 548 с.
59. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. В 2 т. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
60. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений / под ред. А. А. Дородницын. — М. : Изд. Иностранной литературы, 1962.
61. Цветкова В.О., Абалакин И.В., Бобков В.Г., Жданова Н.С., Козубская Т.К., Кудрявцева Л.Н. Моделирование обтекания винта на адаптивной неструктурированной сетке с использованием метода погруженных // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 8. С. 59–82.
62. Чжен П. (P.Chang). Отрывные течения. Том 2 // Мир, 1973, 335 с.
63. Шенг Дж., Шерр Дж. Расчет обтекания полной компоновки космического самолета на основе уравнений Навье-Стокса // Аэрокосмич. техн. – 1987. – № 7. – С. 13-21.
64. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
65. Шур М.Л., Спаларт Ф.Р., Стрелец М.Х., Расчет шума сложных струй на основе “первых принципов”, Матем. моделирование, 2007, том 19, номер 7, 5–26.
66. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://grabcad.com/library/sukhoi-su-27b-flanker-1>

67. Abalakin V., Kozubskaya T.K., Dervieux A. High Accuracy Finite Volume Method for Solving Nonlinear Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes, - Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 19, No. 2, (2006)
68. Kozubskaya T., Abalakin I., Dervieux A., Ouvrard H. Accuracy Improvement for Finite-Volume Vertex-Centered Schemes Solving Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes, -AIAA paper 2010-3933 (2010).
69. Abgrall R. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation // J Comput Phys. – 1994. – Vol. 144. – Pp. 45–58.
70. Alauzet F., Loseille A. High-order sonic boom modeling based on adaptive methods // Journal of Computational Physics 229, 2010, 561–593
71. Alauzet Fric, Borouchaki Houman, George Paul Louis, Laug Patrick, Loseille Aen, Marechal Loic. Meshing, Geometric Modeling and Numerical Simulation 2: Metrics, Meshes and Mesh Adaptation. // John Wiley and Sons, 2019
72. Aso S., Tani Y. Numerical Study of the Effect of the Opposing Jet on Reduction of Aerodynamic Heating with Different Nose Configurations, 26th International Congress of the Aeronautical Sciences, Anchorage, AL, September 14 – 19, 2008
73. Bank R. E., Xu J. An algorithm for coarsening unstructured meshes // Numer. Math., 73 (1996), pp. 1-36.
74. Barth T.J. A 3-0 Upwind Euler Solver for Unstructured Meshes. AIAA Paper 91-1548, 1991
75. Barth T.J. Aspects of Unstructured Grids and Finite-Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations. AGARD R-787, Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows, Brussels, Belgium, 18-22 May, 1992, pp. 6.1-6.61.
76. Barth T.J. Numerical aspects of computing viscous high Reynolds number flow on unstructured meshes // AIAA Paper 91-0721, 1991.
77. Barth T.J., Deconinck H. High-order methods for computational physics. – Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 1999. – 587 p.
78. Barth T.J., Jespersen T.J. The Design and application of upwind schemes on unstructured grids // AIAA Paper. 1989. No 89-0366
79. Betelin V.B., Shagaliev R.M., Aksenov S.V., Belyakov I.M., Deryuguin Yu.N., Kozelkov A.S., Korchazhkin D.A., Nikitin V.F., Sarazov A.V., Zelenskiy D.K. Mathematical simulation of hydrogen–oxygen combustion in rocket engines using LOGOS code // Acta Astronautica. – 2014. – Vol. 96. – Pp.53–64.
80. Blazek J. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications. – New York: Elsevier, 2001. – 496 p

81. Bui T.T. A Parallel, Finite-Volume Algorithm for Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows // NASA. Tech.Memorandum. – 1999. – No. 206570. – Pp. 1-20.
82. Cabuk H., Sung C.-H., Modi V. Explicit Runge-Kutta Method for Three Dimensional Internal Incompressible Flows // AIAA Journal, 30, 1992, pp. 2024-2031.
83. Carre G., An implicit multigrid method by agglomeration applied to turbulent flows, Comput. Fluids 26, 299 (1997).
84. Chakravarthy S.R., Osher S. A new class of high-accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper, 1985, №. 85-0363.
85. Charles L. Ladson, Acquilla S. Hill, William G. Johnson. Pressure Distributions from High Reynolds Number Transonic Tests of an NACA 0012 Airfoil in the Langley 0.3-Meter Transonic Cryogenic Tunnel. NASA Technical Memorandum, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1987.
86. Chase N., Carrica P.M. Submarine propeller computations and application to self-propulsion of DARPA Sub off // Ocean Engineering. – 2013. – Vol. 60, No.1. – Pp. 68-80.
87. Cheng G., Neroorkar K., Chen Y., Wang T., Daso E.. Numerical Study of Flow Augmented Thermal Management for Entry and Re-entry Environments. 25th AIAA Applied Aerodynamics Conference, Miami, FL, June 25-28, 2007.
88. Coakley T.J. Turbulence modeling method for the compressible Navie-Stokes equations // AIAA Paper. – 1983. – No. 1693.
89. Daunenhofer J.F., Baron J.R. Grid Adaption for the 2D Euler Equations // Technical report AIAA-85-0484, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1985.
90. Delanaye M., Liu. Y. Quadratic reconstruction finite volume schemes on 3D arbitrary unstructured polyhedral grids // AIAA Paper. – 1999. – No. 3259.
91. Deryugin Yu. N., Zelensky D.K., Zhuchkov R.N., Yemelyanova Y.V., Pavlov G.A., Smirnov A.L. On flow field of the system of supersonic jets in the Mars atmosphere // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – Vol. 134. – Pp.1084-1090.
92. Deryugin Yu.N., Sarazov A.V., Zhuchkov R.N. Specific features of the chimera calculation methodology implemented for unstructured grids // Mathematical Model and Computer Simulations. – 2017. – Vol. 9, Issue 5. – Pp.587-597.
93. Deryugin Yu.N., Sarazov A.V., Zhuchkov R.N. Specific features of the chimera calculation methodology implemented for unstructured grids // Mathematical Model and Computer Simulations. – 2017. – Vol. 9, Issue 5. – Pp.587-597.
94. Deryugin YuN., Zhuchkov R.N., Zelenskiy D.K., Kozelkov A.S., Sarazov A.V., Kudimov N. F., Lipnickiy Yu. M., Panasenko A. V. and Safronov A. V. Validation Results for the LOGOS Multifunction Software Package in Solving Problems of Aerodynamics and Gas

- Dynamics for the Lift-Off and Injection of Launch Vehicles // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2015, v. 7, №2, p. 144–153.
95. Doru Caraeni, Jonathan Weiss, Wayne Smith, Dery Snyder, Nolan Halliday, James Clement., Continuity Convergence Acceleration of a Density-Based Coupled Algorithm // *Fluid Dynamics and Co-located Conferences*, June 24-27, 2013, San Diego, 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. AIAA 2013-2962
 96. Dumbser M., Kaeser M., Titarev V. A. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems // *Journal of Computational Physics*. – 2007. – Vol. 226. – Pp. 204–243.
 97. Ferziger J. H., Peric M. *Computational methods for fluid dynamics*. Third edition. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. – 423 p.
 98. Garbaruk A., Magidov D., Shur M., Strelets M., Travin A. Contribution by SPTU: Support of Partners' Efforts Directed to Implementation of DES Technology // In: *FLOMANIA - A European Initiative on Flow Physics Modelling*, Springer Berlin, 2006, ed.: Haase W., Aupoix B., Bunge U., Schwamborn D., p.101-108.
 99. Gorobets A.V., Abalakin I.V. and Kozubskaya T.K.. Technology of parallelization for 2D and 3D CFD/CAA codes based on high-accuracy explicit methods on unstructured meshes, - In *Book Parallel Computational Fluid Dynamics 2007*, Series Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer Berlin Heidelberg, Vol. 67, (2009), pp. 253-260
 100. Gottlieb S. On high-order strong stability preserving Runge-Kutta and multi step time discretizations // *Journal of Scientific Computing*, 2005, v. 25, № 1-2, p. 105-128.
 101. Hayashi K., Aso S., Tani Y. Numerical Study of Thermal Protection System by Opposing Jet. AIAA-paper, No. AIAA-2005-188, 2005.
 102. Hayashi K., Aso S., Tani Y.. Experimental Study of Thermal Protection System by Opposing Jet in Supersonic Flow. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 43, No. 1, pp. 233-238, 2006.
 103. Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes // *AIAA Paper*. – 1981. – No. 1259.
 104. Jasak H. *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flow*. Thesis submitted for the degree of doctor // Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, London, 1996.
 105. John David Anderson. *Hypersonic and high-temperature gas dynamics* // McGraw-Hill Book Company // 1988, p.702.

106. John David Anderson. Introduction to Flight, 5th ed., McGraw–Hill, New York, 2005.
107. Josyula E., Shang J. Computation of Nonequilibrium Hypersonic Flow fields Around Hemisphere Cylinders// J. of Thermophysics and Heat Transfer. 1993. Vol.7. No.4. pp.668-679.
108. Issa R.I. Solution of the Implicitly Discretized Fluid Flow Equations by Operator-Splitting. Journal of Computational Physics. 62. 40-65. 1985.
109. Kim K.H., Kim Ch. and Rho O.-H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows. I AUSMPW+ scheme // J. Comput. Phys. – 2001. – Vol. 174. – Pp. 38-80.
110. Kotov D.V., Surzhikov S.T. Calculation of Viscous and Inviscid Gas Flows on Unstructured Grids Using the AUSM Scheme // Fluid Dynamics, 2011, Vol. 46, No. 5, pp. 809–825.
111. Kozelkov A.S., Struchkov A.V., Strelets D.Yu., Two Methods to Improve the Efficiency of Supersonic Flow Simulation on Unstructured Grids // Fluids 2022, 7, 136. DOI: 10.3390/fluids7040136 (a).
112. Kozelkov A. S., Strelets D. Yu., Sokuler M. S. and Arifullin R. H., Application of Mathematical Modeling to Study Near-Field Pressure Pulsations of a Near-Future Prototype Supersonic Business Aircraft // J. Aerosp. Eng., 2022, 35(1): 04021120 (6).
113. Leveque R. J. Finite volume methods for hyperbolic problems. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 558 p.
114. Li W. Efficient implementation of high-order accurate numerical methods on unstructured grid: Theses Recognizing Outstanding Ph.D.Research. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. – 148 p.
115. Liou M.-S. A Sequel to AUSM: AUSM+ // J. Comput. Phys. – 1996. – Vol. 129. – Pp. 364- 382.
116. Liu Junhui, Kailasanath K., Ramamurti Ravi, Munday David, Gutmark Ephraim, Lohner Rainald. Large-Eddy Simulations of a Supersonic Jet and Its Near-Field Acoustic Properties // American Institute of Aeronautics and Astronautics // Year:2009
117. Matsuyama Shingo. Performance of all-speed AUSM-family schemes for DNS of low Mach number turbulent channel flow // Elsevier, 2014, Month:3, Volume:91, Issue: 130-143
118. Mavriplis D.J. An assessment of linear versus nonlinear multigrid methods for unstructured mesh solvers // Journal of Computational Physics. 2002. Vol. 175. No. 1. P. 302-325.
119. Mavriplis D.J.. Directional agglomeration multigrid techniques for high-Reynolds number viscous flows // AIAA J. 37, 1222 (1999).
120. Mon.:08, Vol.:47, Issue:8, p. 1849-1865.

121. Munday D., Gutmark E., Liu J., Kailasanath K. Flow structure and acoustics of supersonic jets from conical convergent-divergent nozzles // *Physics of Fluids*, 2011. Vol. 23. № 116102. 13pp.
122. Nishikawa H., Diskin B. Development and application of parallel agglomerated multigrid method for complex geometries // *AIAA Paper*. 2011. No. 2011-3232.
123. Norum T.D., Seiner J.M. Broadband shock noise from supersonic jets // *AIAA Journal*. 1980. Vol. 20. № 1. pp. 68–73.
124. Pack D.C. A note on Prandtl's formula for the wavelength of a supersonic gas jet // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1950. Vol. 3. № 2. pp. 173–181
125. Park C. *Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics*. John Wiley & Sons. 1990. New-York. P. 358.
126. Pierce N., Giles M., Jameson A., Martinelli L. Accelerating three-dimensional Navier–Stokes calculations // In *Proceedings of the 13th AIAA CFD Conference, Snowmass Village, CO, June 1997, AIAA Paper 97-1953*.
127. Plewa T., Linde T., Gregory Weirs V. Adaptive Mesh Refinement - Theory and Applications: Proceedings of the Chicago Workshop on Adaptive Mesh Refinement Methods // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Sept. 3-5, 2003.
128. Robert L. Mc.Coy. *Modern Exterior Ballistics* // Schiffer Publishing, Ltd. // 1998, p. 328
129. Rodionov A.V. Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: The three dimensional case // *J. Comput. Phys.* – 2018. – V. 361. – P. 50–55.
130. Roe P. L. Characteristic Based Schemes for the Euler Equations // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1986. – Vol. 18. – Pp. 337-365.
131. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper*. – 1992, No. 0439.
132. Steve H., Lallemand M., Dervieux A. Unstructured multigridding by volume agglomeration: Current status // *Computers and Fluids*, Volume 21, (3):397–433, 1992.
133. Strelets M. Detached eddy simulation of massively separated flow // *AIAA Paper*. – 2001. – No. 0879
134. Struchkov A.V., Kozelkov A.S., Volkov K., Kurkin A.A., Zhuchkov R.N., Sarazov A.V. Numerical simulation of aerodynamic problems based on adaptive mesh refinement method. *Acta Astronaut.* 2020, 172, 7–15; DOI: 10.1016/j.actaastro.2020.03.019
135. Struchkov, A., Kozelkov, A., Zhuchkov R, Volkov, K., Strelets D. Implementation of Flux Limiters in Simulation of External Aerodynamic Problem on Unstructured Meshes. *Fluids* 2023, 8(1), 31; DOI: 10.3390/fluids8010031

136. Sun L. Q., Sugiyama H., Mizobata K., et al. Numerical and experimental investigations on the Mach 2 pseudo-shock wave in a square duct // *J. Visual.* 2003. V. 6, N 4. P. 363–370.
137. Sun L., Sugiyama H., Mizobata K., et al. Numerical and experimental investigations on Mach 2 and 4 pseudo-shock waves in a square duct // *Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci.* 2004. V. 47, N 156. P. 124–130.
138. Sweby P.K. High resolution using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.*, 21 (1984), pp. 995-1011.
139. Titarev V.A., Tsoutsanis P., Drikakis D. WENO schemes for mixed-element unstructured meshes // *Journal of Computational Physics.* – 2011. – Vol. 230. – Pp. 1585–1601
140. Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P. R. Detached-Eddy Simulations past a Circular Cylinder // *Flow. Turb. Comb.*, 2000, vol. 63, pp. 293-313.
141. Tsvetkova V., Kozubskaya T., Kudryavtseva L., Zhdanova N. On mesh adaptation for supercomputer simulation of flows around solid bodies defined by immersed boundary method // *Proc. Computer Science.* 2020. V. 178. P. 404–413.
142. Uzun A., Hussaini M.Y. An application of delayed detached eddy simulation to tandem cylinder flow field prediction // *Computers & Fluids.* – 2012. – Vol. 60. – Pp. 71-85.
143. Venkatakrisnan V. Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters // *Journal of Computational Physics*, 118, 120-130, 1995.
144. Venkatakrisnan V. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solution // *AIAA Paper.* 1993. No 93-0880
145. Venkatakrisnan V. Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters // *Journal of Computational Physics*, 118, 120-130, 1995.
Venkatakrisnan V. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solution // *AIAA Paper.* 1993. No 93-0880
146. Venkatakrisnan V., Mavriplis D. J., Agglomeration multigrid for the three-dimensional Euler equations, *AIAA J.* 33, 633 (1995).
147. Vierendeels Jan, Merci Bart, Dick Erik. Blended AUSM+ Method for All Speeds and All Grid Aspect Ratios // *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Year:2001, Month:12, Volume:39, Issue:12, 2278-2282.
148. Waithe K. Introduction of First Low Boom Prediction Workshop // *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Grapevine (Dallas/Ft. Worth), Texas, January 07-10 2013, AIAA-2013-0650.
149. Wang Z.J. High-order methods for the Euler and Navier–Stokes equations on unstructured grids // *Progress in Aerospace Sciences.* – 2007. – Vol. 43, No. 1–3. – Pp. 1–41.

150. Warren G.P., Andersom W.K., Thomas J.L., Krist S.L. Grid convergence for adaptive methods // AIAA-91-1592. AIAA 10th Computational fluid dynamics conference, Honolulu, Hawaii American Institute of Aeronautics and Astronautics. June 1991.
151. Weiss J.M., Maruszewski J.P., Smith W.A. Implicit Solution of the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes. Technical Report AiAA-97-2103. 13th AIAA CFD Conference, Snowmass, CO July 1997.
152. Weiss J.M., Maruszewski J.P., Smith W.A. Implicit Solution of Preconditioned Navier-Stokes Equations Using Algebraic Multigrid. AIAA Journal. 37(1). 29-36. 1999.
153. Wesseling P., Oosterlee C.W. Geometric multigrid with applications to computational of fluid dynamics // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. Vol. 128. No. 1-2. P. 311-334.
154. Xiao Z., Liu J., Fu S. Calculations of massive separation around landing-gear-like geometries // Journal of Hydrodynamics. – 2010. – Vol. 22, Issue 5. – Pp. 926-931.
155. Zegeling A. Theory and application of adaptive moving grid methods. In T. Tang and J. Xu, editors, Adaptive Computations: Theory and Algorithms, pages 279–332, Science Press, Beijing, 2007. Mathematics Monograph Series 6.
156. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Zhu J. Z. The finite element method: Its basis and fundamentals. 6th edition. – Oxford: Elsevier, 2005. – 752 p.